Все прототипы №20-22 из банка ФИПИ

Все прототипы №20 из банка ФИПИ

1. Решите уравнение $x^3+5x^2=4x+20$.

Ответ

$-2;\ 2;\ 5$

Решение

$$x^3+5x^2=4x+20$$
$$x^3+5x^2-4x-20=0$$
$$x^2(x+5)-4(x+5)=0$$
$$(x+5)\left(x^2-4\right)=0$$

Воспользуемся формулой разности квадратов для второго множителя:

$$(x+5)\left(x^2-4\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+5)(x-2)(x+2)=0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, поэтому

$$(x+5)(x-2)(x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+5=0 \\ x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

2. Решите уравнение $(x-1)\left(x^2+8x+16\right)=6(x+4)$.

Ответ

$-5;\ -4;\ 2$

Решение

$$(x-1)\left(x^2+8x+16\right)=6(x+4)$$
$$(x-1)\left(x^2+8x+16\right)-6(x+4)=0$$

Так как по формуле сокращённого умножения $\left(x^2+8x+16\right)=(x+4)^2$, то

$$(x-1)(x+4)^2-6(x+4)=0$$
$$(x-1)(x+4)(x+4)-6(x+4)=0$$
$$(x+4)\left((x-1)(x+4)-6\right)=0$$
$$(x+4)\left(x^2-x+4x-4-6\right)=0$$
$$(x+4)\left(x^2+3x-10\right)=0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, поэтому

$$(x+4)\left(x^2+3x-10\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x+4=0\\ &x^2+3x-10=0\end{aligned}\right.$$

Решим второе уравнение системы:

$$x^2+3x-10=0$$

$$D=3^2+4\cdot10=49=7^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{2}$$

$$x_1=2$$

$$x_2=-5$$

Таким образом,

$$\left[\begin{aligned} &x+4=0\\ &x^2+3x-10=0\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x=-4\\ &x=2\\ &x=-5\end{aligned}\right.$$

3. Решите уравнение $x^4=(2x-3)^2$.

Ответ

$-3;\ 1$

Решение

$$x^4=(2x-3)^2$$

$$x^4-(2x-3)^2=0$$

$$\left(x^2\right)^2-(2x-3)^2=0$$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\left(x^2\right)^2-(2x-3)^2=0$$

$$\left(x^2-(2x-3)\right)\left(x^2+(2x-3)\right)=0$$

$$\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2+2x-3\right)=0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, поэтому

$$\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2+2x-3\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2-2x+3=0\\ &x^2+2x-3=0\end{aligned}\right.$$

Так как в первом уравнении системы $D=4-4\cdot3<0$, то уравнение не имеет корней.

Решим второе уравнение системы:

$$x^2+2x-3=0$$

$$D=2^2+4\cdot 3=16=4^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$$x_1=-3$$

$$x_2=1$$

Таким образом, решением уравнения будет

$$\left[\begin{aligned}&x=-3\\&x=1\end{aligned}\right.$$

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x-2}-6=0$.

Ответ

$\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{7}{3}$

Решение

ОДЗ: $x-2\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 2$

Сделаем замену. Пусть $t=\dfrac{1}{x-2}$. Тогда $\dfrac{1}{(x-2)^2}=t^2$. Решим новое уравнение:

$$t^2-t-6=0$$

Найдём корни уравнения по теореме Виета:

$$\left[\begin{aligned}&t=-2\\&t=3\end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned}&\tfrac{1}{x-2}=-2\\&\tfrac{1}{x-2}=3\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&\tfrac{1}{x-2}=\tfrac{-2}{1}\\&\tfrac{1}{x-2}=\tfrac{3}{1}\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&-2(x-2)=1\\&3(x-2)=1\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&-2x+4=1\\&3x-6=1\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&2x=3\\&3x=7\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&x=\tfrac{3}{2}\\&x=\tfrac{7}{3}\end{aligned}\right.$$

5. Решите уравнение $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0$.

Ответ

$4-\sqrt{7}$; $4+\sqrt{7}$

Решение

Сделаем замену $t=(x-4)^2$. Тогда $(x-4)^4=\left((x-4)^2\right)^2=t^2$. Решим новое уравнение:

$$t^2-4t-21=0$$

Найдём корни уравнения по теореме Виета:

$$t^2-4t-21=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&t=7\\&t=-3\end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned}&(x-4)^2=7\\&(x-4)^2=-3\end{aligned}\right.$$

Так как для любого x верно, что $(x-4)^2\geqslant 0$, то второе уравнение не имеет решений. Решим первое уравнение.

$$(x-4)^2=7\quad\Leftrightarrow\quad(x-4)^2-7=0\quad\Leftrightarrow\quad(x-4)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=0$$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(x-4)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=0$$

$$\left(x-4-\sqrt{7}\right)\left(x-4+\sqrt{7}\right)=0$$

$$\left[\begin{aligned}&x-4-\sqrt{7}=0\\&x-4+\sqrt{7}=0\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{aligned}&x=4+\sqrt{7}\\&x=4-\sqrt{7}\end{aligned}\right.$$

6. Решите уравнение $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$.

Ответ

-3

Решение

ОДЗ: $5-x\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad x\leqslant 5$

$$x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$$

$$x^2-3x+\sqrt{5-x}-\sqrt{5-x}-18=0$$

$$x^2-3x-18=0$$

$$D=3^2+4\cdot 18=81=9^2$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{2}$$

$$x_1=6\text{ — не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$x_2=-3$$

Таким образом, $x=-3$ — решение уравнения.

7. Решите уравнение $\left(x^2-49\right)^2+\left(x^2+4x-21\right)^2=0$.

Ответ

-7

Решение

Сумма двух квадратов будет равна нулю только в том случае, когда оба эти выражения равны нулю одновременно, то есть

$$\left(x^2-49\right)^2+\left(x^2+4x-21\right)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-49=0\\ x^2+4x-21=0\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$x^2-49=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-7)(x+7)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x-7=0\\ &x+7=0\end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x=7\\ &x=-7\end{aligned}\right.$$

Найдём корни второго уравнение по теореме Виета:

$$x^2+4x-21=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &x=-7\\ &x=3\end{aligned}\right.$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x^2-49=0\\ x^2+4x-21=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=7\\ &x=-7\end{aligned}\right.\\ \left[\begin{aligned} &x=-7\\ &x=3\end{aligned}\right.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=-7$$

Таким образом, решением уравнения является $x=-7$.

8. Решите неравенство $\dfrac{-14}{(x-5)^2-2}\geqslant 0$.

Ответ

$\left(5-\sqrt{2};5+\sqrt{2}\right)$

Решение

$$\frac{-14}{(x-5)^2-2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-14}{(x-5)^2-\left(\sqrt{2}^2\right)}\geqslant 0$$

Разложим знаменатель на множители с помощью формулы разности квадратов:

$$\frac{-14}{(x-5)^2-\left(\sqrt{2}^2\right)}\geqslant 0$$

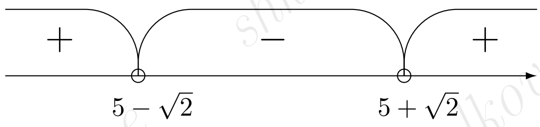
$$\frac{-14}{\left(x-5-\sqrt{2}\right)\left(x-5+\sqrt{2}\right)}\geqslant 0$$

$$\frac{14}{\left(x-5-\sqrt{2}\right)\left(x-5+\sqrt{2}\right)}\leqslant 0$$

Решим неравенство методом интервалов.

Нулей числителя нет. Найдём нули знаменателя:

1. $x-5-\sqrt{2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=5+\sqrt{2}$.
2. $x-5+\sqrt{2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=5-\sqrt{2}$



Значит, решением неравенства будет интервал $x \in \left(5-\sqrt{2}; 5+\sqrt{2}\right)$.

9. Решите неравенство $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$.

Ответ

$\left(6; 6+\sqrt{10}\right)$

Решение

$$(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$$
$$(x-6)^2 - \sqrt{10}(x-6) < 0$$
$$(x-6)(x-6) - \sqrt{10}(x-6) < 0$$
$$(x-6)\left(x-6-\sqrt{10}\right) < 0$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули:

1. $x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6.$
2. $x-6-\sqrt{10}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6+\sqrt{10}.$

Значит, решением неравенства будет $x \in \left(6; 6+\sqrt{10}\right)$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y=5, \\ 6x^2-y=2. \end{cases}$

Ответ

$(1;4)$; $(-1;4)$

Решение

Решим систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x^2+y=5 \\ 6x^2-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ 6x^2-(5-x^2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ 6x^2-5+x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ 7x^2-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ (x-1)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=5-1^2 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=5-(-1)^2 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда ответ $(1;4)$; $(-1;4)$.

11. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y. \end{cases}$

Ответ

$(2;6)$; $\left(\dfrac{5}{4};0\right)$

Решение

Решим систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 4x^2 - 5x = y \\ 8x - 10 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x = 8x - 10 \\ 8x - 10 = y \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$4x^2 - 5x = 8x - 10$$

$$4x^2 - 13x + 10 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 4 \cdot 10 = 9 = 3^2$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{8}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{5}{4}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} 4x^2 - 5x = 8x - 10 \\ 8x - 10 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \\ y = 8x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \cdot 2 - 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 8 \cdot \frac{5}{4} - 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда ответ $(2;6)$; $(\frac{5}{4};0)$.

12. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x. \end{cases}$

Ответ

$(3-3)$; $(3;3)$

Решение

$$\begin{cases}3x^2+2y^2=45\\ 9x^2+6y^2=45x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2y^2=45\\ 3\left(3x^2+2y^2\right)=45x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2y^2=45\\ 3\cdot 45=45x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2y^2=45\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^2=45-27\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^2=18\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2-9=0\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-3)(y+3)=0\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{gathered}y=3\\ y=-3\end{gathered}\right.\\ x=3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{gathered}\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}\end{gathered}\right.$$

Тогда ответ $(3;3)$; $(3;-3)$.

13. Найдите значение выражения $41a-b+45$, если $\dfrac{a-6b+5}{6a-b+5}=7$.

Ответ

15

Решение

Знаменатель дроби не может быть равен 0, то есть $6a-b+45\neq 0$.

Воспользовавшись свойством пропорции, перемножим накрест:

$$\frac{a-6b+5}{6a-b+5}=\frac{7}{1}$$

$$(a-6b+5)=7\cdot(6a-b+5)$$

$$a-6b+5=42a-7b+35$$

$$41a-b+30=0$$

Теперь ответим на вопрос задачи:

$$41a-b+45=(41a-b+30)+15=0+15=15$$

14. Сократите дробь $\dfrac{36^n}{3^{2n-1}\cdot 4^{n-2}}$.

Ответ

48

Решение

$$\frac{36^n}{3^{2n-1}\cdot 4^{n-2}}=\frac{9^n\cdot 4^n}{3^{2n-1}\cdot 4^{n-2}}=\frac{3^{2n}}{3^{2n-1}}\cdot\frac{4^n}{4^{n-2}}=3\cdot 4^2=48$$

Все прототипы №21 из банка ФИПИ

15. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 180 км. На следующий день он отправился обратно в A, увеличив скорость на 5 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A.

Ответ

20 км/ч

Решение

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста на пути из A в B. Тогда скорость на пути из B в A равна $x+5$ км/ч. Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
Туда	x	$\frac{180}{x}$	180
Обратно	$x+5$	$\frac{180}{x+5}$	180

По условию время, затраченное на путь из A в B равно времени, которое велосипедист потратил на дорогу обратно вместе с трёхчасовой остановкой. Составим уравнение:

$$\frac{180}{x} = \frac{180}{x+5} + 3$$

$$\frac{180(x+5) - 180x - 3x(x+5)}{x(x+5)} = 0$$

$$\begin{cases} 180(x+5) - 180x - 3x(x+5) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$180x + 180 \cdot 5 - 180x - 3x^2 - 15x = 0$$

$$-3x^2 - 15x + 180 \cdot 5 = 0$$

$$3x^2 + 15x - 180 \cdot 5 = 0$$

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$D = 5^2 + 4 \cdot 300 = 1225 = 35^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 35}{2}$$

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = -20 \text{ — не подходит по смыслу задачи}$$

Значит, скорость велосипедиста на пути из A в B равна 15 км/ч. Тогда скорость на пути из B в A равна $15 + 5 = 20$ км/ч.

16. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ

14 км/ч

Решение

Пусть скорость второго велосипедиста равна x км/ч. Тогда скорость первого велосипедиста равна $x+2$ км/ч. Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
Первый	$x+2$	$\dfrac{224}{x+2}$	224
Второй	x	$\dfrac{224}{x}$	224

По условию второй велосипедист прибывает к финишу на 2 часа позже. Составим уравнение:

$$\frac{224}{x}-\frac{224}{x+2}=2$$

$$\frac{224(x+2)-224x-2x(x+2)}{x(x+2)}=0$$

$$\begin{cases}224x+224\cdot 2-224x-2x^2-4x=0\\ x\neq 0\\ x\neq -2\end{cases}$$

Решим уравнение:

$$-2x^2-4x+224\cdot 2=0$$

$$2x^2+4x-224\cdot 2=0$$

$$x^2+2x-224=0$$

$$D=4+4\cdot 224=4\cdot(1+224)=4\cdot 225=(2\cdot 15)^2=30^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 30}{2}$$

$$x_1=14$$

$$x_2=-16 \text{ — не подходит по смыслу задачи}$$

Значит, скорость второго велосипедиста равна 14 км/ч.

17. Моторная лодка прошла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ

15 км/ч

Решение

Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч. Тогда скорость лодки по течению равна $x+3$ км/ч, а скорость против течения равна $x-3$ км/ч.

Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$x+3$	$\dfrac{72}{x+3}$	72
Против течения	$x-3$	$\dfrac{72}{x-3}$	72

По условию время, затраченное на путь по течению, на 2 часа меньше времени, затраченного на путь против течения. Составим уравнение:

$$\frac{72}{x-3}-\frac{72}{x+3}=2$$

$$\frac{72}{x-3}-\frac{72}{x+3}-2=0$$

$$\frac{72(x+3)-72(x-3)-2(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=0$$

$$\begin{cases} 72(x+3)-72(x-3)-2(x-3)(x+3)=0 \\ x\neq 3 \\ x\neq -3 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$72x+72\cdot 3-72x+72\cdot 3-2\left(x^2-9\right)=0$$

$$2\cdot 72\cdot 3-2x^2+2\cdot 9=0$$

$$-2x^2+2\cdot 9+2\cdot 72\cdot 3=0$$

$$2x^2-2\cdot 9-2\cdot 72\cdot 3=0$$

$$x^2-9-72\cdot 3=0$$

$$x^2=9+72\cdot 3=9+9\cdot 8\cdot 3=$$

$$=9\cdot(1+24)=9\cdot 25=(3\cdot 5)^2=15^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x=15 \\ x=-15 \text{ — не подходит по смыслу задачи} \end{array}\right.$$

Таким образом, скорость лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч.

18. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 285 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 34 км/ч, стоянка длится 19 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 36 часов после отплытия из него.

Ответ

4 км/ч

Решение

Пусть x — скорость течения реки. Тогда скорость теплохода по течению реки равна $34+x$ км/ч, а скорость против течения равна $34-x$ км/ч.

Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$34+x$	$\dfrac{285}{34+x}$	285
Против течения	$34-x$	$\dfrac{285}{34-x}$	285

По условию на весь путь со стоянкой в 19 часов было потрачено 36 часов. Значит, теплоход плыл $36-19=17$ ч. Составим уравнение:

$$\frac{285}{34+x}+\frac{285}{34-x}=17$$

$$\frac{285(34-x)+285(34+x)-17(34-x)(34+x)}{(34+x)(34-x)}=0$$

$$\begin{cases}285(34-x)+285(34+x)-17(34-x)(34+x)=0\\ x\neq -34\\ x\neq 34\end{cases}$$

Решим уравнение:

$$285\cdot 34-285x+285\cdot 34+285x-17\left(34^2-x^2\right)=0$$

$$285\cdot 2+285\cdot 2-\left(34^2-x^2\right)=0$$

$$285\cdot 4-34^2+x^2=0$$

$$x^2=34^2-285\cdot 4=17^2\cdot 2^2-285\cdot 4=$$

$$=4\cdot(289-285)=4\cdot 4=4^2$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-4 \text{ — не подходит по смыслу задачи}\end{array}\right.$$

Таким образом, скорость течения равна 4 км/ч.

19. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 51 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего по платформе параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 50 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ

750

Решение

$$50\text{ с} = \frac{50}{60\cdot 60}\text{ ч} = \frac{1}{6\cdot 12}\text{ ч} = \frac{1}{72}\text{ ч}$$

Перейдём в систему отсчёта, связанную с пешеходом. Пусть $v_{\text{пеш.}}$ и $v_{\text{поезда}}$ — скорости пешехода и поезда соответственно в новой системе отсчёта. Тогда $v_{\text{пеш.}} = 0$ км/ч, а поезд едет мимо пешехода со скоростью

$$v_{\text{поезда}} = 51 + 3\text{ км/ч} = 54\text{ км/ч}$$

Пусть x км — длина поезда. Тогда за 50 секунд поезд проехал расстояние, равное своей длине, со скоростью 54 км/ч:

$$x = 54\cdot\frac{1}{72}\text{ км} = \frac{54}{72}\text{ км} = \frac{3}{4}\text{ км} = 0,75\text{ км} = 750\text{ м}$$

20. Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 26 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 217 км, скорость первого велосипедиста равна 21 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Ответ

133 км

Решение

Найдём расстояние, которое второй велосипедист проехал, пока первый стоял 26 минут:

$$30\text{ км/ч}\cdot 26\text{ мин} = 30\text{ км/ч}\cdot\frac{26}{60}\text{ ч} = 30\cdot\frac{13}{30}\text{ км} = 13\text{ км}$$

Тогда расстояние, которое они проехали вместе (то есть когда ехал и первый велосипедист, и второй), равно $217 - 13$ км $= 204$ км.

Так как велосипедисты движутся навстречу друг другу, то их скорость сближения равна $21 + 30$ км/ч $=$ 51 км/ч.

Значит время, которое велосипедисты ехали вместе, составляет $\frac{204}{51} = 4$ ч. При этом время, которое второй велосипедист потратил на путь, состоит из времени, которое велосипедисты проехали вместе, и из времени, которое второй велосипедист проехал один:

$$4\text{ ч} + 26\text{ мин} = 4\text{ ч} + \frac{26}{60}\text{ ч} = \frac{120}{30}\text{ ч} + \frac{13}{30}\text{ ч} = \frac{133}{30}\text{ ч}$$

Найдём расстояние, которое проехал второй велосипедист до места встречи:

$$\frac{133}{30}\text{ ч}\cdot 30\text{ км/ч} = 133\text{ км}$$

21. Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью меньше скорости первого автомобиля на 11 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 40 км/ч.

Ответ

44 км/ч

Решение

Пусть весь путь равен $2S$ км, а скорость первого автомобиля — x км/ч. Первую половину пути, то есть S км, второй автомобиль проехал со скоростью $x - 11$ км/ч, а вторую половину пути (S км) он проехал со скоростью 66 км/ч. Составим таблицу:

Автомобили	v, км/ч	t, ч	s, км
Первый	x	$\frac{2S}{x}$	$2S$
Второй (первая половина пути)	$x-11$	$\frac{S}{x-11}$	S
Второй (вторая половина пути)	66	$\frac{S}{66}$	S

По условию оба автомобиля прибыли в пункт B одновременно. Составим уравнение:

$$\frac{2S}{x} = \frac{S}{x-11} + \frac{S}{66}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x-11} + \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-11} - \frac{1}{66} = 0$$

$$\frac{2\cdot 66(x-11) - 66x - x(x-11)}{66x(x-11)} = 0$$

$$\begin{cases} 2\cdot 66(x-11) - 66x - x(x-11) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 11 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$2\cdot 66x - 2\cdot 66\cdot 11 - 66x - x^2 + 11x = 0$$

$$66x - 2\cdot 66\cdot 11 - x^2 + 11x = 0$$

$$-x^2 + 77x - 2\cdot 66\cdot 11 = 0$$

$$x^2 - 77x + 2\cdot 66\cdot 11 = 0$$

$$D = 77^2 - 4\cdot 2\cdot 66\cdot 11 = 7\cdot 11\cdot 7\cdot 11 - 4\cdot 2\cdot 6\cdot 11\cdot 11 =$$

$$= 11\cdot 11\cdot (49-48) = 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{77\pm 11}{2}$$

$$x_1 = 44$$

$$x_2 = 33 \text{ — не удовлетворяет условию } x > 40$$

Значит, скорость первого автомобиля равна 44 км/ч.

22. Расстояние между пристанями A и B равно 140 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 51 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ

18 км/ч

Решение

Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч. Тогда скорость лодки против течения равна $x-3$ км/ч, а скорость лодки по течению равна $x+3$ км/ч. Скорость плота равна скорости течения реки, то есть 3 км/ч. Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
Лодка по течению	$x+3$	$\dfrac{140}{x+3}$	140
Лодка против течения	$x-3$	$\dfrac{140}{x-3}$	140
Плот	3	$\dfrac{51}{3}$	51

Время, которое плыл плот, равно $51:3=17$ ч.

Так как лодка отправилась из пункта A на час позже плота, то время, которое было затрачено лодкой на путь, составляет $17-1=16$ ч.

Составим уравнение:

$$\frac{140}{x+3}+\frac{140}{x-3}=16$$

$$\frac{140}{x+3}+\frac{140}{x-3}-16=0$$

$$\frac{140(x-3)+140(x+3)-16(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=0$$

$$\begin{cases}140(x-3)+140(x+3)-16(x-3)(x+3)=0\\ x\neq-3\\ x\neq3\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$140x-140\cdot3+140x+140\cdot3-16\left(x^2-9\right)=0$$

$$2\cdot140x-16x^2+16\cdot9=0$$

$$16x^2-2\cdot140x-16\cdot9=0$$

$$2x^2-35x-18=0$$

$$D=35^2+8\cdot18=1225+144=1369=37^2$$

$$x_{1,2}=\frac{35\pm37}{4}$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-\frac{1}{2}\text{ — не подходит по смыслу задачи}$$

Значит, скорость лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч.

23. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 55 км/ч, а вторую — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Ответ

$61,6$ км/ч

Решение

Пусть весь путь равен $2S$ км. Тогда первая половина пути равна S км, вторая половина также равна S км. Время, которое было затрачено на первую половину пути, равно отношению расстояния к скорости на этом участке пути, то есть $\frac{S}{55}$ ч. Аналогично время на второй половине пути равно $\frac{S}{70}$ ч. Средняя скорость равна отношению пути, пройдённого автомобилем, ко времени движения, то есть

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S+S}{\frac{S}{55}+\frac{S}{70}} \text{ км/ч} = \frac{2S}{\frac{14S+11S}{5\cdot 11\cdot 14}} \text{ км/ч} = \frac{2S}{\frac{25S}{5\cdot 11\cdot 14}} \text{ км/ч} =$$

$$= 2S : \frac{25S}{5\cdot 11\cdot 14} \text{ км/ч} = \frac{2S}{1}\cdot\frac{5\cdot 11\cdot 14}{25S} \text{ км/ч} = \frac{28\cdot 11}{5} \text{ км/ч} =$$

$$= \frac{56\cdot 11}{10} \text{ км/ч} = \frac{616}{10} \text{ км/ч} = 61,6 \text{ км/ч}$$

24. Первые 160 км автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие 100 км — со скоростью 50 км/ч, а последние 360 км — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Ответ

$77,5$ км/ч

Решение

Пусть $S_1,\ S_2,\ S_3$ — расстояния на первом, втором и третьем участках соответственно, $t_1,\ t_2,\ t_3$ — скорости на трёх участках. Найдём среднюю скорость:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S_1+S_2+S_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{160+100+360}{\frac{160}{80}+\frac{100}{50}+\frac{360}{90}} \text{ км/ч} =$$

$$= \frac{620}{2+2+4} \text{ км/ч} = \frac{620}{8} \text{ км/ч} = \frac{155}{2}\text{км/ч} = 77,5 \text{ км/ч}$$

25. Баржа прошла по течению реки 80 км и, повернув обратно, прошла ещё 60 км, затратив на весь путь на 10 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ

15 км/ч

Решение

Пусть собственная скорость баржи равна x км/ч. Тогда скорость баржи по течению равна $x+5$ км/ч, скорость против течения равна $x-5$ км/ч.

Составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$x+5$	$\dfrac{80}{x+5}$	80
Против течения	$x-5$	$\dfrac{60}{x-5}$	60

По условию на весь путь было потрачено 10 часов. Составим уравнение:

$$\frac{80}{x+5}+\frac{60}{x-5}=10$$

$$\frac{80(x-5)+60(x+5)-10(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+5)}=0$$

$$\begin{cases} 80(x-5)+60(x+5)-10(x-5)(x+5)=0 \\ x\neq 5 \\ x\neq -5 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$80x-80\cdot 5+60x+60\cdot 5-10\left(x^2-25\right)=0$$

$$140x-5\cdot 20-10x^2+10\cdot 25=0$$

$$14x-10-x^2+25=0$$

$$-x^2+14x+15=0$$

$$x^2-14x-15=0$$

$$(x-15)(x+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-15=0 \\ x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=15 \\ x=-1 \text{ — не подходит по смыслу задачи} \end{array}\right.$$

Таким образом, собственная скорость баржи равна 15 км/ч.

26. Первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 140 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ

20

Решение

Пусть производительность второго рабочего равна x деталей в час. Тогда производительность первого рабочего равна $x+6$ деталей в час.

Составим таблицу:

Рабочие	P, дет./ч	t, ч	A, дет.
Первый	$x+6$	$\dfrac{140}{x+6}$	140
Второй	x	$\dfrac{140}{x}$	140

По условию первый рабочий выполняет заказ из 140 деталей на 3 часа быстрее, чем второй. Составим уравнение:

$$\frac{140}{x}-\frac{140}{x+6}=3$$

$$\frac{140(x+6)-140x-3x(x+6)}{x(x+6)}=0$$

$$\begin{cases} 140(x+6)-140x-3x(x+6)=0 \\ x\neq 0 \\ x\neq -6 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$140x+140\cdot 6-140x-3x^2-18x=0$$

$$-3x^2-18x+140\cdot 6=0$$

$$3x^2+18x-140\cdot 6=0$$

$$x^2+6x-280=0$$

$$D=6^2+4\cdot 280=4\cdot(9+280)=4\cdot 289=(2\cdot 17)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm 2\cdot 17}{2}$$

$$x_1=14$$

$$x_2=-20 \text{ — не подходит по смыслу задачи}$$

Значит, производительность второго рабочего равна 14 дет./ч. Тогда первый рабочий делает $14+6=20$ деталей в час.

27. Первая труба пропускает на 9 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 112 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

Ответ

21

Решение

Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту. Тогда вторая труба пропускает $x+9$ литров воды в минуту.

Составим таблицу:

Трубы	P, л/мин	t, мин	A, л
Первая	x	$\dfrac{112}{x}$	112
Вторая	$x+9$	$\dfrac{112}{x+9}$	112

По условию вторая труба заполняет резервуар объёмом 112 литров на 4 минуты быстрее, чем первая. Составим уравнение:

$$\frac{112}{x} - \frac{112}{x+9} = 4$$

$$\frac{112}{x} - \frac{112}{x+9} - 4 = 0$$

$$\frac{112(x+9) - 112x - 4x(x+9)}{x(x+9)} = 0$$

$$\begin{cases} 112(x+9) - 112x - 4x(x+9) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -9 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$112x + 112 \cdot 9 - 112x - 4x^2 - 36x = 0$$

$$-4x^2 - 36x + 112 \cdot 9 = 0$$

$$4x^2 + 36x - 112 \cdot 9 = 0$$

$$x^2 + 9x - 28 \cdot 9 = 0$$

$$D = 9^2 + 4 \cdot 28 \cdot 9 = 9 \cdot (9 + 4 \cdot 28) = 9 \cdot 121 = (3 \cdot 11)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3 \cdot 11}{2}$$

$$x_1 = 12$$

$$x_2 = -21 \text{ — не подходит по смыслу задачи}$$

Таким образом, производительность первой трубы равна 12 л/мин. Тогда производительность второй трубы равга $12 + 9 = 21$ л/мин.

28. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости второго.

Ответ

11

Решение

Пусть скорость первого бегуна x км/ч. Тогда скорость второго бегуна равна $x+5$ км/ч.

Так как спустя час после начала первому бегуну сообщили, что второй прибежал 15 минут назад, то второй бегун пробежал круг за

$$60-15\text{ мин}=45\text{ мин}=\frac{45}{60}\text{ ч}=\frac{3}{4}\text{ ч}$$

Посчитаем длину круга через скорости первого и второго бегунов.

Длина круга, посчитанная через скорость первого бегуна, равна

$$(x\cdot 1+1)\text{ км}=x+1\text{ км}$$

Длина круга, посчитанная через скорость второго бегуна, равна

$$(x+5)\cdot\frac{3}{4}\text{ км}$$

Составим уравнение:

$$x+1=(x+5)\cdot\frac{3}{4}$$

$$4x+4=3(x+5)$$

$$4x+4=3x+15$$

$$x=11$$

Значит, скорость первого бегуна равна 11 км/ч.

29. Свежие фрукты содержат 86% воды, а высушенные — 18%. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 35 кг высушенных фруктов?

Ответ

205 кг

Решение

Составим таблицу:

Фрукты	Вода, %	Сухое вещество, %
Свежие	86	$100-86=14$
Высушенные	18	$100-18=82$

Найдём массу сухого вещества в 35 кг высушенных фруктов:

$$\frac{82}{100}\cdot 35\text{ кг}=\frac{41\cdot 7}{10}\text{ кг}=\frac{287}{10}\text{ кг}$$

Так как масса сухого вещества не меняется, то в свежих фруктах содержится $\frac{287}{10}$ кг сухого вещества. Пусть для изготовления 35 кг высушенных фруктов нужно x кг свежих. Составим пропорцию:

$$\frac{\frac{287}{10}}{x}=\frac{14}{100}\quad\Rightarrow\quad 287\cdot 10=14x\quad\Rightarrow\quad x=\frac{287\cdot 10}{14}=205\text{ кг}$$

30. Свежие фрукты содержат 72% воды, а высушенные — 26 %. Сколько сухих фруктов получится из 222 кг свежих фруктов?

Ответ

84 кг

Решение

Составим таблицу:

Фрукты	Вода, %	Сухое вещество, %
Свежие	72	$100-72=28$
Высушенные	26	$100-26=74$

Найдём массу сухого вещества в 222 кг свежих фруктов:

$$\frac{28}{100}\cdot 222\text{ кг}=\frac{28\cdot 222}{100}\text{ кг}$$

Так как масса сухого вещества не меняется, то в высушенных фруктах содержится $\frac{28\cdot 222}{100}$ кг сухого вещества. Пусть из 222 кг свежих фруктов получается x кг высушенных. Составим пропорцию:

$$\frac{\frac{28\cdot 222}{100}}{x}=\frac{74}{100}\quad\Rightarrow\quad\frac{28\cdot 222}{100}\cdot 100=74x\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 28\cdot 222=74x\quad\Rightarrow\quad x=\frac{28\cdot 222}{74}=84\text{ кг}$$

31. Смешали 7 литров 25-процентного раствора вещества с 8 литрами 10-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ

17

Решение

Составим таблицу:

Растворы	Объём раствора, л	Концентрация, %	Объём вещества, л
Первый	7	25	$\frac{25}{100}\cdot 7$
Второй	8	10	$\frac{10}{100}\cdot 8$

Концентрация раствора вычисляется по формуле

$$C=\frac{V_{\text{вещ-ва}}}{V_{\text{р-ра}}}\cdot 100\%,$$

где C — концентрация раствора, $V_{\text{вещ-ва}}$ — объём вещества, $V_{\text{р-ра}}$ — объём раствора.

Объём получившегося раствора равен сумме объёмов первого и второго растворов. Найдём концентрацию получившегося раствора:

$$C=\frac{\frac{25}{100}\cdot 7+\frac{10}{100}\cdot 8}{7+8}\cdot 100\%=\frac{\frac{1}{4}\cdot 7+\frac{1}{10}\cdot 8}{15}\cdot 100\%=\frac{\frac{7}{4}+\frac{4}{5}}{15}\cdot 100\%=$$

$$=\frac{\frac{35+16}{20}}{15}\cdot 100\%=\frac{51\cdot 100}{20\cdot 15}\%=17\%$$

32. Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 33% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 47% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Ответ

2

Решение

Пусть концентрация первого раствора равна $x\%$, концентрация второго раствора — $y\%$.

Составим таблицу:

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
Первый	40	x	$\frac{x}{100}\cdot 40$
Второй	20	y	$\frac{y}{100}\cdot 20$
Смесь	$40+20=60$	33	$\frac{33}{100}\cdot 60$

Так как масса чистого вещества не меняется, то

$$\frac{x}{100}\cdot 40+\frac{y}{100}\cdot 20=\frac{33}{100}\cdot 60$$

По условию, если слить равные массы этих растворов, то полученнный раствор будет содержать 47% кислоты. Пусть массы первого и второго раствора равны k кг. Составим таблицу:

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
Первый	k	x	$\frac{x}{100}\cdot k$
Второй	k	y	$\frac{y}{100}\cdot k$
Смесь	$2k$	47	$\frac{47}{100}\cdot 2k$

Так как масса чистого вещества не меняется, то

$$\frac{x}{100}\cdot k+\frac{y}{100}\cdot k=\frac{47}{100}\cdot 2k$$

Так как $k\neq 0$, то можем поделить на k и умножить на 20. Тогда получим

$$\frac{x}{100}\cdot 20+\frac{y}{100}\cdot 20=\frac{47}{100}\cdot 40$$

Составим систему:

$$\begin{cases}\frac{x}{100}\cdot 40+\frac{y}{100}\cdot 20=\frac{33}{100}\cdot 60\\ \frac{x}{100}\cdot 20+\frac{y}{100}\cdot 20=\frac{47}{100}\cdot 40\end{cases}$$

$$\begin{cases}40x+20y=33\cdot 60\\ 20x+20y=47\cdot 40\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$40x-20x=33\cdot 60-47\cdot 40$$

$$20x=33\cdot 60-47\cdot 40$$

$$2x=33\cdot 6-47\cdot 4$$

$$x=33\cdot 3-47\cdot 2$$

$$x=99-94$$

$$x=5$$

Значит, концентрация первого раствора равна 5%. Найдём массу кислоты в первом растворе:

$$\frac{5}{100}\cdot 40\text{ кг}=\frac{1}{2}\cdot 4\text{ кг}=2\text{ кг}$$

33. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 93 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям по платформе со скоростью 3 км/ч, за 24 секунды. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ

600

Решение

$$24\text{ с} = \frac{24}{60 \cdot 60}\text{ ч} = \frac{24}{3600}\text{ ч} = \frac{1}{150}\text{ ч}$$

Перейдём в систему отсчёта, связанную с пешеходом. Пусть $v_{\text{пеш.}}$ и $v_{\text{поезда}}$ — скорости пешехода и поезда соответственно в новой системе отсчёта. Тогда $v_{\text{пеш.}} = 0$ км/ч, а поезд едет мимо пешехода со скоростью

$$v_{\text{поезда}} = 93 - 3\text{ км/ч} = 90\text{ км/ч}$$

Поезд за 24 секунды проехал расстояние, равное своей длине, со скоростью 90 км/ч. Найдём длину поезда

$$90 \cdot \frac{1}{150}\text{ км} = \frac{90}{150}\text{ км} = \frac{9}{15}\text{ км} = \frac{3}{5}\text{ км} = \frac{3}{5} \cdot 1000\text{ м} = 600\text{ м}$$

Все прототипы №22 из банка ФИПИ

34. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 4x - 5 \text{ при } x < 1, \\ -2{,}5x + 5 \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 9 \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ

$m \in \{-5\} \cup [-1; 2{,}5]$

Решение

Рассмотрим график функции на каждом из промежутков.

При $x < 1 : y = 4x - 5$. Это линейная функция, графиком является прямая.

Построим таблицу значений для этой прямой:

x	1	0
y	-1	-5

Для данного графика точка $(1; -1)$ является выколотой.

При $1 \leqslant x \leqslant 4 : y = -2{,}5x + 5$. Это линейная функция, графиком является прямая.

Построим таблицу значений для этой прямой:

x	1	4
y	2,5	-5

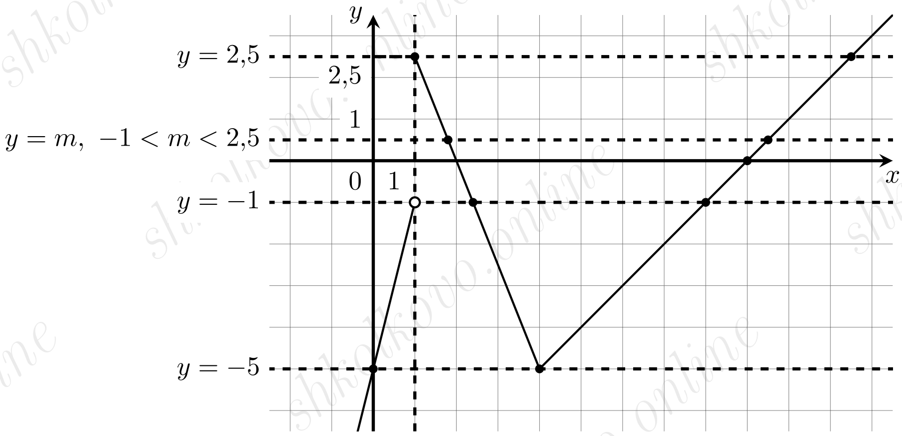
При $x > 4 : y = x - 9$. Это линейная функция, графиком является прямая.

Построим таблицу значений для этой прямой:

x	4	9
y	-5	0

Точка $(4;-5)$ — выколотая для этого графика.

Построим график функции:



Таким образом, в $x = 1$ функция терпит разрыв. А точка $(4;-5)$ — точка стыка двух прямых.

$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Прямая $y = m$ имеет две точки пересечения с графиком в следующих случаях:

1. Прямая $y = m$ проходит через точку стыка $(4;-5)$. В этом случае $m = -5$.
2. Прямая $y = m$ проходит через выколотую точку $(1;-1)$. В этом случае $m = -1$.
3. Прямая $y = m$ проходит через точку $(1;2{,}5)$. В этом случае $m = 2{,}5$.
4. Прямая $y = m$ расположена между прямыми $y = -1$ и $y = 2{,}5$. В этом случае $m \in (-1;2{,}5)$.

Получаем ответ: $m \in \{-5\} \cup [-1;2{,}5]$.

35. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \text{ при } x \geqslant -4, \\ -\dfrac{36}{x} \text{ при } x < -4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ

$m \in \{0\} \cup [9;+\infty)$

Решение

Рассмотрим график функции на каждом из промежутков.

При $x \geqslant -4: y = x^2 + 2x + 1$. Это квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями вверх.

Найдём вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_{\text{в.}} = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

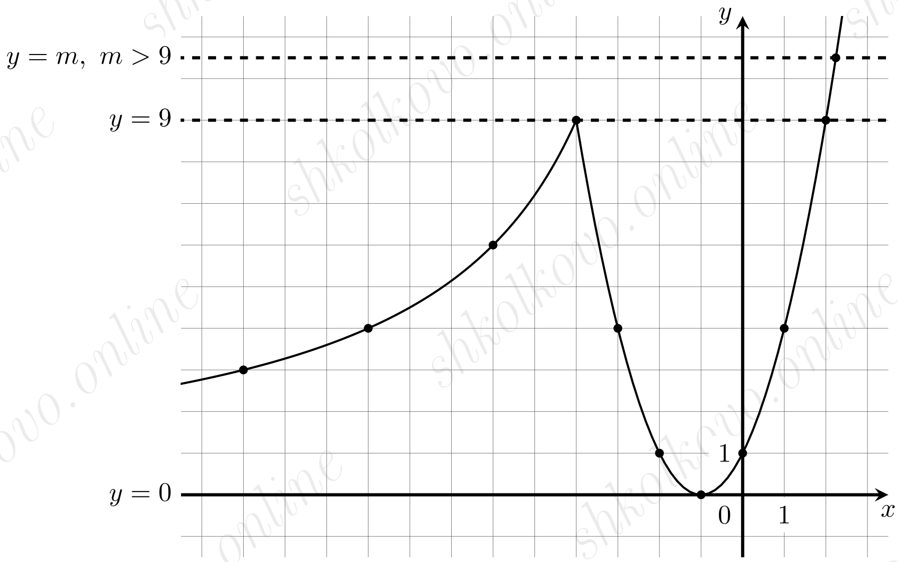
Построим таблицу значений для параболы:

x	-1	-2	-3	-4	0	1	2
y	0	1	4	9	1	4	9

При $x < -4 : y = -\dfrac{36}{x}$. Графиком функции является гипербола.
Построим таблицу значений для гиперболы:

x	-4	-6	-9	-12
y	9	6	4	3

Точка $(-4; 9)$ — выколотая для этого графика. Следовательно, $(-4; 9)$ — точка стыка двух графиков.
Построим график функции:



Ось $y = 0$ — горизонтальная асимптота гиперболы.

$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Опишем положения, в которых у графика функции и прямой $y = m$ будет одна или две общие точки:

1. Прямая $y = m$ проходит через вершину параболы $(-1; 0)$, следовательно, $m = 0$. В этом случае у прямой одна точка пересечения с вершиной параболы, а с гиперболой общих точек нет.

2. Прямая $y = m$ проходит через точку стыка $(-4; 9)$. В этом случае у графика функции и прямой $y = m$ две точки пересечения.

3. Прямая расположена выше прямой $y = 9$, следовательно, $m > 9$. В этом случае у графика функции и прямой $y = m$ одна точка пересечения.

Получаем ответ: $m \in \{0\} \cup [9; +\infty)$.

36. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1 \text{ при } x \geqslant -3, \\ -x - 2 \text{ при } x < -3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ

$m \in (1;4) \cup \{5\}$

Решение

Рассмотрим график функции на каждом из промежутков.

При $x \geqslant -3: y = -x^2 - 4x + 1$. Это квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями вниз. Найдём вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y_{\text{в.}} = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

Построим таблицу значений для параболы:

x	-2	-3	-1	0	1
y	5	4	4	1	-4

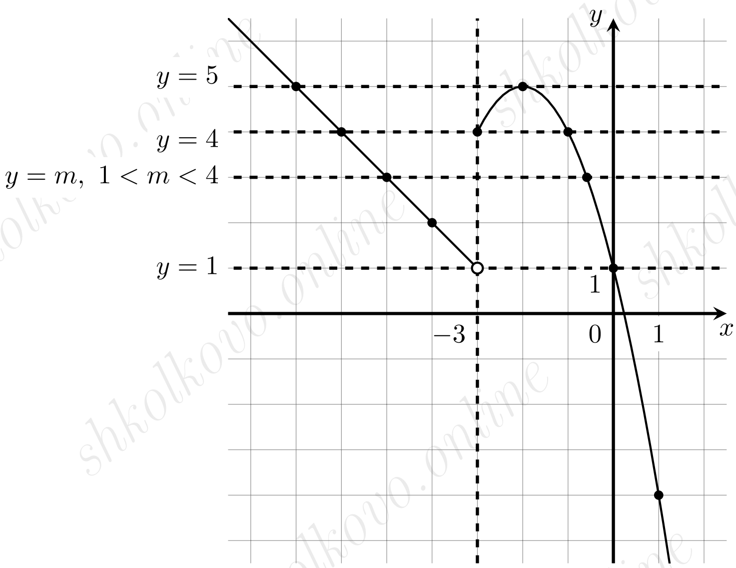
При $x < -3: y = -x - 2$. Это линейная функция, графиком является прямая.

Построим таблицу значений для прямой:

x	-3	-4
y	1	2

Точка $(-3;1)$ — выколотая для этого графика. Следовательно, в $x = -3$ функция терпит разрыв.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдем, в каких положениях у графика функции и прямой $y = m$ две точки пересечения:

1. Если прямая проходит через выколотую точку $(-3;1)$, то есть $m = 1$, то такая прямая имеет одну общую точку с графиком функции.

2. Если прямая проходит через точку $(-3;4)$, то есть $m = 4$, то такая прямая пересекает график функции в трех точках.

3. Между прямыми $y = 1$ и $y = 4$ прямая $y = m$ будет пересекать график в двух точках. В этом случае $m \in (1;4)$.

4. Если прямая $y = m$ проходит через вершину параболы $(-2; 5)$, то она имеет две общие точки с графиком функции. В этом случае $m = 5$.

Получаем ответ: $m \in (1; 4) \cup \{5\}$.

37. Постройте график функции $y = \dfrac{6x+7}{6x^2+7x}$.

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ

$\dfrac{36}{49}$

Решение

Область определения функции:

$$6x^2 + 7x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(6x+7) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ 6x + 7 \neq 0 \end{cases}$$

Упростим выражение:

$$y = \frac{6x+7}{6x^2+7x} = \frac{6x+7}{x(6x+7)} = \frac{1}{x}$$

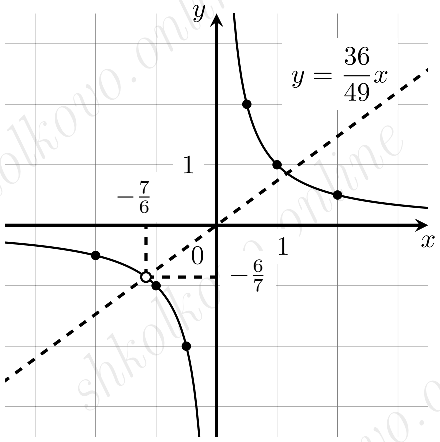
Построим таблицу значений для гиперболы:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-4

Так как $6x + 7 \neq 0$, то есть $x \neq -\dfrac{7}{6}$, то будет выколотая точка. Найдём её координаты:

$$x = -\frac{7}{6} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{-\frac{7}{6}} = -\frac{6}{7}$$

Построим график функции:



$y = kx$ — пучок прямых, проходящих через точку $(0; 0)$.

Прямая $y = kx$ имеет ровно одну общую точку в одном случае: когда прямая проходит через выколотую точку $\left(-\frac{7}{6}; -\frac{6}{7}\right)$. Найдём, чему равно k :

$$-\frac{7}{6}k = -\frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad k = \left(-\frac{6}{7}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{36}{49}$$

Получаем ответ: $k = \dfrac{36}{49}$.

38. Постройте график функции $y = 1 - \dfrac{x+5}{x^2+5x}$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Ответ

$k \in \{1; 1\frac{1}{5}\}$

Решение

Область определения функции:

$$x^2+5x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+5) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Упростим выражение:

$$y = 1 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 1 - \frac{x+5}{x(x+5)} = 1 - \frac{1}{x}$$

Графиком функции $y = 1 - \frac{1}{x}$ является гипербола с вертикальной асимптотой $x = 0$ и горизонтальной асимптотой $y = 1$.

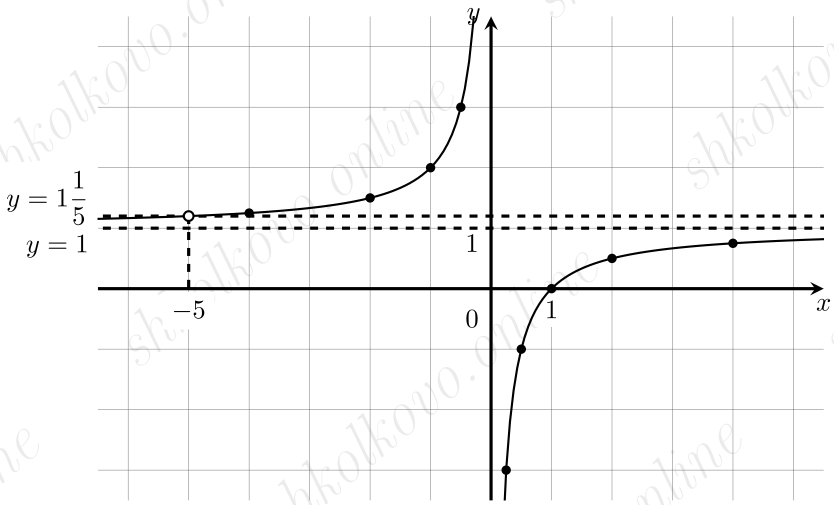
Найдём координаты выколотой точки:

$$x = -5 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{-5} = 1\frac{1}{5}$$

Построим таблицу значений для гиперболы:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-1	-3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	5

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком в двух случаях:

1. Прямая $y = m$ является горизонтальной асимптотой для гиперболы. В этом случае $m = 1$.
2. Прямая $y = m$ проходит через выколотую точку $\left(-5; 1\frac{1}{5}\right)$. В этом случае $m = 1\frac{1}{5}$.

Получаем ответ: $k \in \{1; 1\frac{1}{5}\}$.

39. Постройте график функции $y = \dfrac{\left(x^2+6{,}25\right)(x+1)}{-1-x}$.

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ

$k \in \{-7{,}25; -5; 5\}$

Решение

Область определения функции:

$$-1 - x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$$

Упростим выражение

$$y = \frac{\left(x^2+6{,}25\right)(x+1)}{-(x+1)} = -\left(x^2+6{,}25\right) = -x^2 - 6{,}25$$

$y = -x^2 - 6{,}25$ — квадратичная функция, её графиком является парабола. Найдём вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} = 0$$

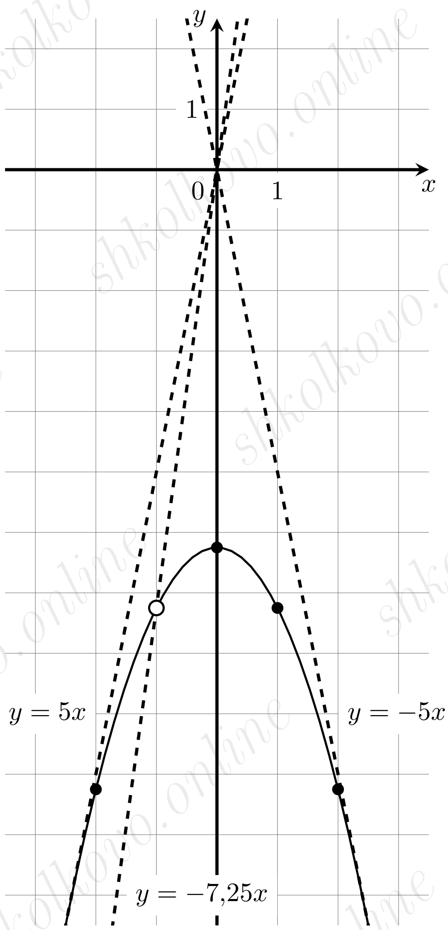
$$y_{\text{в.}} = -0^2 - 6{,}25 = -6{,}25$$

Так как по области определения $x \neq -1$, то есть выколотая точка. Найдём её координаты:

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -(-1)^2 - 6{,}25 = -1 - 6{,}25 = -7{,}25$$

Построим таблицу значений для параболы:

x	0	-1	1	-2	2
y	$-6{,}25$	$-7{,}25$	$-7{,}25$	$-10{,}25$	$-10{,}25$



Построим график функции.

$y = kx$ — пучок прямых, проходящих через точку $(0;0)$. $y = kx$ будет иметь с параболой одну общую точку, если

1. $y = kx$ является касательной к параболе. Чтобы графики касались, нужно, чтобы следующая система имела единственное решение:

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -x^2 - 6{,}25 \end{cases}$$

То есть уравнение $kx = -x^2 - 6{,}25$ должно иметь единственное решение. Квадратное уравнение имеет единственное решение, когда дискриминант равен 0:

$$x^2 + kx + 6{,}25 = 0$$

$$D = k^2 - 4 \cdot 6,25 = k^2 - 25 = 0$$

$$(k-5)(k+5) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &k = 5 \\ &k = -5 \end{aligned}\right.$$

2. Одна точка пересечения будет также, когда прямая $y = kx$ проходит через выколотую точку $(-1; -7{,}25)$.

Найдём k в этом случае:

$$-7{,}25 = k(-1) \quad \Rightarrow \quad k = 7{,}25$$

Таким образом, $k \in \{-7{,}25; -5; 5\}$.

40. Постройте график функции $y = 3|x+2| - x^2 - 3x - 2$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ

$m \in \{0;\ 1\}$

Решение

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} 3(x+2) - x^2 - 3x - 2,\ x+2 \geqslant 0 \\ -3(x+2) - x^2 - 3x - 2,\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3x + 6 - x^2 - 3x - 2,\ x \geqslant -2 \\ -3x - 6 - x^2 - 3x - 2,\ x < -2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x^2 + 4,\ x \geqslant -2 \\ -x^2 - 6x - 8,\ x < -2 \end{cases}$$

График функции при $x \geqslant -2$ — парабола $y = -x^2 + 4$ с ветвями вниз.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$y_{\text{в.}} = -0^2 + 4 = 4$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant -2$:

x	0	-2	-1	1	2	3
y	4	0	3	3	0	-5

График функции при $x < -2$ — это парабола $y = -x^2 - 6x - 8$ с ветвями вниз.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

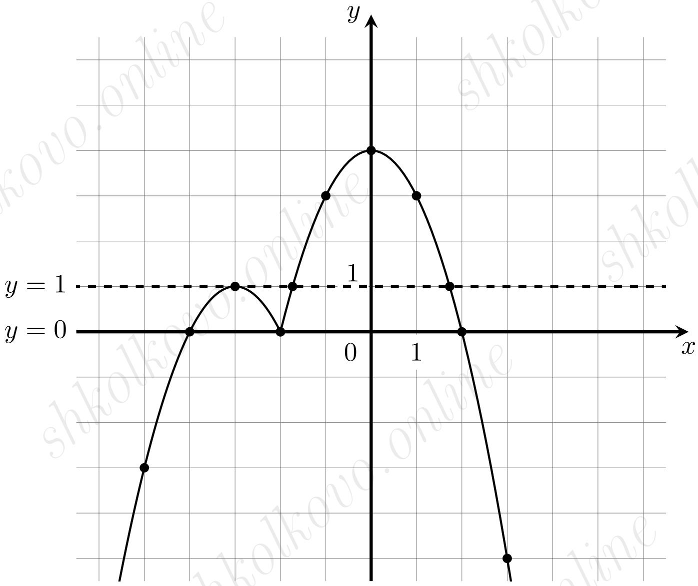
$$y_{\text{в.}} = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 8 = 1$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < -2$:

x	-3	-2	-4	-5
y	1	0	0	-3

Точка $(-2;\ 0)$ является точкой стыка двух графиков.

Построим график функции:



$y=m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y=m$ имеет с графиком ровно 3 общие точки.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m<0$, то прямая $y=m$ имеет 2 общие точки с графиком.
- Если $m=0$, то прямая $y=m$ имеет ровно 3 точки пересечения с графиком.
- Если $0<m<1$, то прямая $y=m$ имеет ровно 4 точки пересечения с графиком.
- Если $m=1$, то прямая $y=m$ имеет 3 точки пересечения с графиком.
- Если $1<m<4$, то прямая $y=m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.
- Если $m=4$ то прямая $y=m$ имеет ровно 1 точку пересечения с графиком.
- Если $m>4$ то прямая $y=m$ не имеет точек пересечения с графиком.

Таким образом, прямая $y=m$ имеет 3 точки пересечения с графиком, когда $m\in\{0;\ 1\}$.

41. Постройте график функции $y = |x| \cdot (x-1) - 2x$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ

$m \in \left\{-\frac{9}{4};\ \frac{1}{4}\right\}$

Решение

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x(x-1) - 2x, & x \geqslant 0 \\ -x(x-1) - 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 2x, & x \geqslant 0 \\ -x^2 + x - 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geqslant 0 \\ -x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

График функции при $x \geqslant 0$ — парабола $y = x^2 - 3x$ с ветвями вверх.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_{\text{в.}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant 0$:

x	$\frac{3}{2}$	0	1	2	3	4
y	$-\frac{9}{4}$	0	-2	-2	0	4

График функции при $x < 0$ — это парабола $y = -x^2 - x$ с ветвями вниз.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

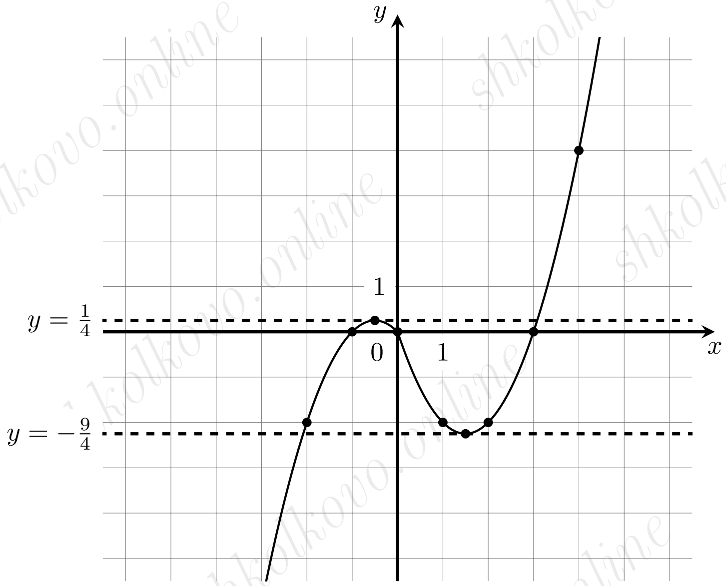
$$y_{\text{в.}} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < 0$:

x	$-\frac{1}{2}$	0	-1	-2	-3
y	$\frac{1}{4}$	0	0	-2	-6

Точка $(0;\ 0)$ является точкой стыка двух графиков.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y = m$ имеет с графиком ровно 2 общие точки.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m < -\frac{9}{4}$, то прямая $y = m$ имеет 1 общую точку с графиком.
- Если $m = -\frac{9}{4}$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком.
- Если $-\frac{9}{4} < m < \frac{1}{4}$, то прямая $y = m$ имеет ровно 3 точки пересечения с графиком.
- Если $m = \frac{1}{4}$, то прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.
- Если $\frac{1}{4} < m$, то прямая $y = m$ имеет 1 точку пересечения с графиком.

Таким образом, прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком, когда $m \in \left\{-\dfrac{9}{4};\ \dfrac{1}{4}\right\}$.

42. Постройте график функции $y = x|x| + |x| - 5x$.
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ
$m \in \{-4;\ 9\}$

Решение
Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x \cdot x + x - 5x, & x \geqslant 0 \\ -x \cdot x - x - 5x, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geqslant 0 \\ -x^2 - 6x, & x < 0 \end{cases}$$

График функции при $x \geqslant 0$ — парабола $y = x^2 - 4x$ с ветвями вверх.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$y_{\text{в.}} = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant 0$:

x	2	0	1	3	4	5
y	-4	0	-3	-3	0	5

График функции при $x < 0$ — это парабола $y = -x^2 - 6x$ с ветвями вниз.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

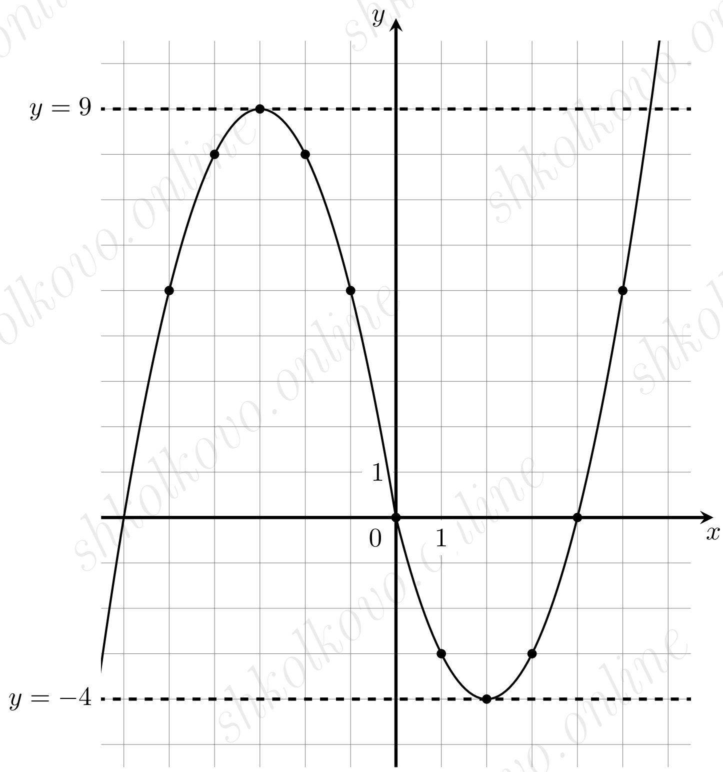
$$y_{\text{в.}} = -\left(-3\right)^2 - 6 \cdot (-3) = -9 + 18 = 9$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < 0$:

x	-3	0	-1	-2	-4	-5
y	9	0	5	8	8	5

Точка (0; 0) является точкой стыка двух графиков.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y = m$ имеет с графиком ровно 2 общие точки.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m < -4$, то прямая $y = m$ имеет 1 общую точку с графиком.
- Если $m = -4$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком.
- Если $-4 < m < 9$, то прямая $y = m$ имеет ровно 3 точки пересечения с графиком.

- Если $m = 9$, то прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.

- Если $9 < m$, то прямая $y = m$ имеет 1 точку пересечения с графиком.

Таким образом, прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком, когда $m \in \{-4;\ 9\}$.

43. Постройте график функции

$$y = \frac{\left(0{,}25x^2 + 0{,}5x\right) \cdot |x|}{x+2}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответ

$m = -1$

Решение

Запишем область определения функции $x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2$.

Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{\left(0{,}25x^2 + 0{,}5x\right) \cdot |x|}{x+2} = \frac{0{,}25x\,(x+2) \cdot |x|}{x+2} = 0{,}25x \cdot |x|$$

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} 0{,}25x \cdot x, & x \geqslant 0 \\ 0{,}25x \cdot (-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0{,}25x^2, & x \geqslant 0 \\ -0{,}25x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Найдем координату выколотой точки: если $x = -2$, то $y = -0{,}25x^2 = -0{,}25 \cdot (-2)^2 = -0{,}25 \cdot 4 = -1$.

Точка $(-2;\ -1)$ является выколотой точкой.

График функции при $x \geqslant 0$ — парабола $y = 0{,}25x^2$ с ветвями вверх.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{0{,}5} = 0$$

$$y_{\text{в.}} = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

График функции при $x < 0$ — это парабола $y = -0{,}25x^2$ с ветвями вниз.

Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-0{,}5} = 0$$

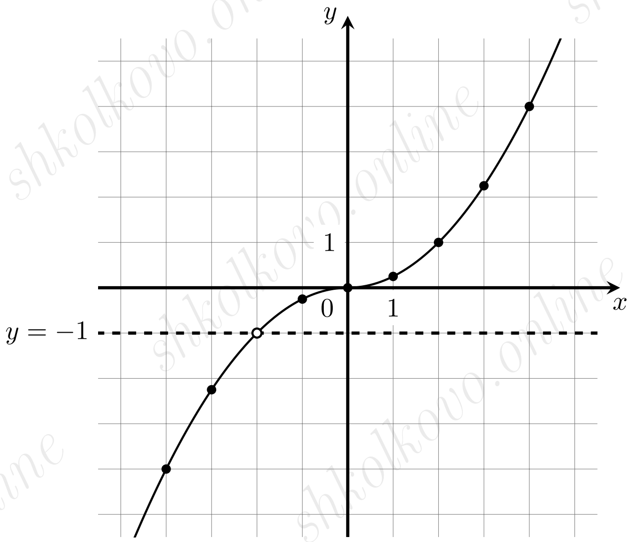
$$y_{\text{в.}} = -0{,}25 \cdot 0^2 = 0$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < 0$:

x	0	-1	-2	-3	-4
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4

Точка (0; 0) является точкой стыка двух графиков.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Видно, что горизонтальные прямые пересекают график в одной точке при любых значениях m, кроме случая, когда прямая проходит через выколотую точку.

Таким образом, при $m = -1$ прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

44. Постройте график функции $y = \left|x^2 + 5x + 6\right|$.

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ

4

Решение

Построим сначала график $y = x^2 + 5x + 6$, затем все участки, находящиеся выше оси абсцисс оставим без изменения, а участки, находящиеся ниже оси абсцисс, отобразим наверх симметрично относительно оси абсцисс.

$y = x^2 + 5x + 6$ — квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх.

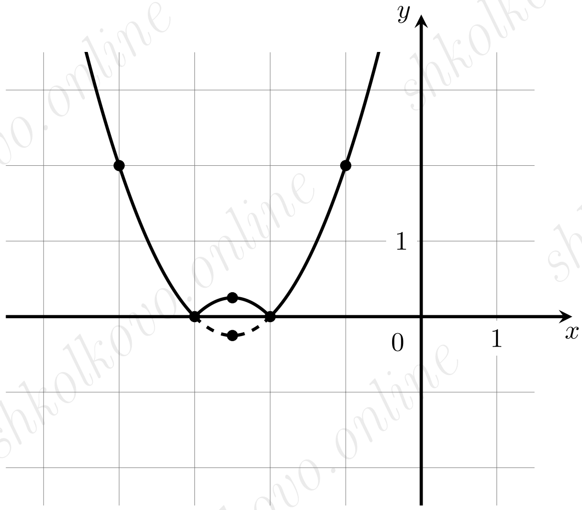
Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}, \quad y_{\text{в.}} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4}$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < 0$:

x	$-\frac{5}{2}$	-3	-2	-4	-1	0	-5
y	$-\frac{1}{4}$	0	0	2	2	6	6

Построим график:



Прямые, параллельные оси абсцисс или совпадающие с ней задаются уравнением $y = m$. Найдём, какое наибольшее количество общих точек могут иметь прямая $y = m$ и график исходной функции.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m < 0$, то прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком.
- Если $m = 0$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком.
- Если $0 < m < \frac{1}{4}$, то прямая $y = m$ имеет ровно 4 точки пересечения с графиком.
- Если $m = \frac{1}{4}$, то прямая $y = m$ имеет 3 точки пересечения с графиком.
- Если $\frac{1}{4} < m$, то прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.

Таким образом, график данной функции и прямая, параллельная оси абсцисс имеют не больше 4 общих точек.

45. Постройте график функции $y = \dfrac{4{,}5|x| - 1}{|x| - 4{,}5x^2}$.

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

Ответ

$k \in \left\{-\dfrac{81}{4};\ 0;\ \dfrac{81}{4}\right\}$

Решение

При $x = 0$ знаменатель обращается в 0.

Раскроем модуль, с учетом замечания выше:

$$y = \begin{cases} \dfrac{4{,}5x - 1}{x - 4{,}5x^2},\ x > 0 \\ \dfrac{-4{,}5x - 1}{-x - 4{,}5x^2},\ x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{4{,}5x - 1}{-x\,(4{,}5x) - 1},\ x > 0 \\ \dfrac{-4{,}5x - 1}{x\,(-4{,}5x - 1)},\ x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x},\ x > 0,\ 4{,}5x - 1 \neq 0 \\ \dfrac{1}{x},\ x < 0,\ -4{,}5x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Упростим условия на x :

$$1)\ 4{,}5x - 1 \neq 0$$
$$4{,}5x \neq 1$$
$$9x \neq 2$$
$$x \neq \frac{2}{9}$$
$$2)\ -4{,}5x - 1 \neq 0$$
$$-4{,}5x \neq 1$$
$$-9x \neq 2$$
$$x \neq -\frac{2}{9}$$

Таким образом, исходная задача теперь выглядит так:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x},\ x > 0,\ x \neq \dfrac{2}{9} \\ \dfrac{1}{x},\ x < 0,\ x \neq -\dfrac{2}{9} \end{cases}$$

График функции при $x > 0,\ x \neq \dfrac{2}{9}$ — это гипербола $y = -\dfrac{1}{x}$. Построим таблицу значений для гиперболы при $x > 0,\ x \neq \dfrac{2}{9}$:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-4

Найдем координаты выколотой точки на этом участке: если $x = \dfrac{2}{9}$, то $y = -\dfrac{1}{\frac{2}{9}} = -\dfrac{9}{2}$.

Точка $\left(\dfrac{2}{9};\ -\dfrac{9}{2}\right)$ является выколотой точкой.

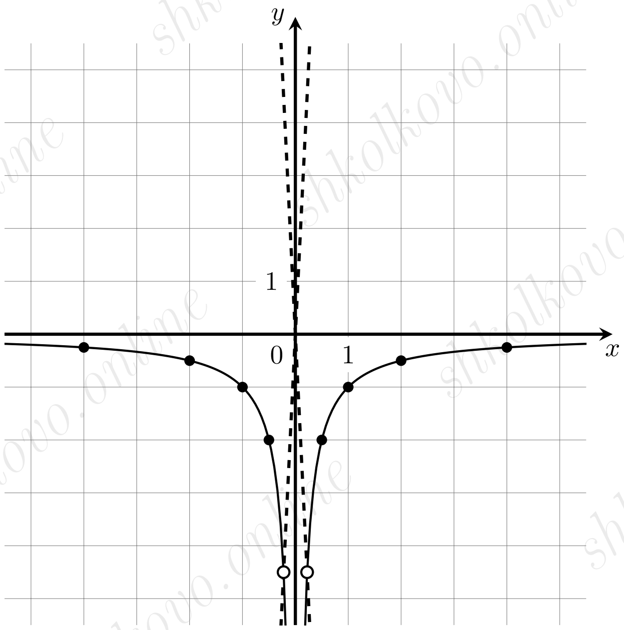
График функции при $x < 0,\ x \neq -\dfrac{2}{9}$ — это гипербола $y = \dfrac{1}{x}$. Построим таблицу значений для гиперболы при $x < 0,\ x \neq -\dfrac{2}{9}$:

x	-1	-2	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-4

Найдем координаты выколотой точки на этом участке: если $x = -\dfrac{2}{9}$, то $y = \dfrac{1}{-\frac{2}{9}} = -\dfrac{9}{2}$.

Точка $\left(-\dfrac{2}{9};\ -\dfrac{9}{2}\right)$ является выколотой точкой.

Построим график функции:



$y = kx$ — пучок прямых, проходящих через точку $(0; 0)$.

Прямая $y = kx$ не имеет точек пересечения в трёх случаях:

1. Прямая $y = kx$ совпадает с осью Ox. В этом случае $k = 0$.
2. Прямая $y = kx$ проходит через выколотую точку $\left(\dfrac{2}{9};\ -\dfrac{9}{2}\right)$. Найдём k :
$$-\frac{9}{2} = \frac{2}{9}k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{81}{4}$$
3. Прямая $y = kx$ проходит через выколотую точку $\left(-\frac{2}{9};\ -\frac{9}{2}\right)$. Найдём k :
$$-\frac{9}{2} = -\frac{2}{9}k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{81}{4}$$

Таким образом, $k \in \left\{-\dfrac{81}{4};\ 0;\ \dfrac{81}{4}\right\}$.

46. Постройте график функции
$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{6}-\frac{6}{x}\right|+\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right).$$
Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ

$m\in\{-1;\ 1\}$

Решение

Запишем область определения функции: $x\neq 0$.

Раскроем модуль:
$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}-\frac{6}{x}+\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right), & \frac{x}{6}-\frac{6}{x}\geqslant 0\\ \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{6}+\frac{6}{x}+\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right), & \frac{x}{6}-\frac{6}{x}<0\end{cases}$$
$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{6}, & \frac{x}{6}-\frac{6}{x}\geqslant 0\\ \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{6}{x}, & \frac{x}{6}-\frac{6}{x}<0\end{cases}$$
Упростим ограничения на x :
$$\frac{x}{6}-\frac{6}{x}\geqslant 0$$
$$\frac{x^2-36}{6x}\geqslant 0$$
$$\frac{(x-6)(x+6)}{6x}\geqslant 0$$
Найдем нули числителя: $x-6=0$ или $x+6=0$, то есть $x=6$ или $x=-6$.

Нули знаменателя: $x=0$.

Решим неравенство методом интервалов:

$x\in[-6;\ 0)\cup[6;\ +\infty)$

Для того, чтобы упростить ограничения из второго случая достаточно воспользоваться той же картинкой из метода интервалов, выбрать участки с «-» и выколоть граничные точки. Тогда решение $x\in(-\infty;\ -6)\cup(0;\ 6)$.

Исходная задача принимает следующий вид:
$$y=\begin{cases}\frac{x}{6}, & x\in[-6;\ 0)\cup[6;\ +\infty)\\ \frac{6}{x}, & x\in(-\infty;\ -6)\cup(0;\ 6)\end{cases}$$
График функции при $x\in[-6;\ 0)\cup[6;\ +\infty)$ — это прямая $y=\frac{x}{6}$.

Построим таблицу значений для прямой при $x\in[-6;\ 0)$:

x	-6	0
y	-1	0

Точка $(0;\ 0)$ является выколотой точкой.

Построим таблицу значений для прямой при $x\in[6;\ +\infty)$:

x	6	12
y	1	2

График функции при $x \in (-\infty;\ -6) \cup (0;\ 6)$ — это гипербола $y = \dfrac{6}{x}$.

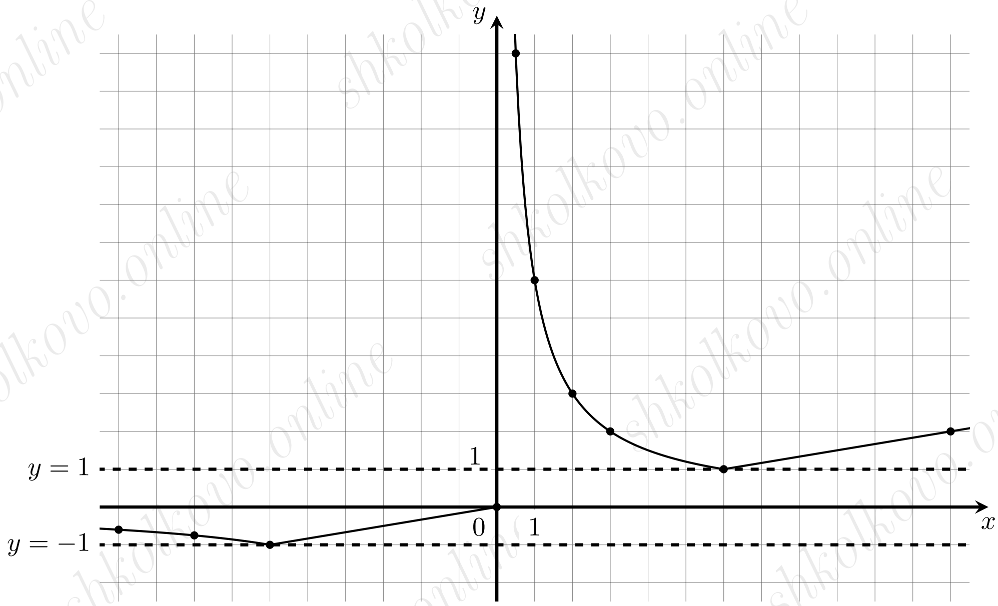
Построим таблицу значений для гиперболы при $x \in (-\infty;\ -6)$:

x	-6	-8	-10
y	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{5}$

Построим таблицу значений для гиперболы при $x \in (0;\ 6)$:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6
y	12	6	3	2	1

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y = m$ имеет с графиком ровно 1 общую точку.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m < -1$, то прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком.
- Если $m = -1$, то прямая $y = m$ имеет ровно 1 точку пересечения с графиком.
- Если $-1 < m < 0$, то прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.
- Если $0 \leqslant m < 1$, то прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком.
- Если $1 < m$, то прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком.

Таким образом, прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком, когда $m \in \{-1;\ 1\}$.

47. Постройте график функции $y = x^2 - |6x+5|$.

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ

$m \in \left\{-4;\ \dfrac{25}{36}\right\}$

Решение

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x^2 - (6x+5),\ 6x+5 \geqslant 0 \\ x^2 - (-(6x+5)),\ 6x+5 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x - 5,\ x \geqslant -\dfrac{5}{6} \\ x^2 + 6x + 5,\ x < -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

График функции при $x \geqslant -\dfrac{5}{6}$ — парабола $y = x^2 - 6x - 5$ с ветвями вверх.
Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_{\text{в.}} = 3^2 - 6 \cdot 3 - 5 = -14$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant -\dfrac{5}{6}$:

x	3	0	1	2	$-\frac{5}{6}$
y	-14	-5	-10	-13	$\frac{25}{36}$

График функции при $x < -\dfrac{5}{6}$ — это парабола $y = x^2 + 6x + 5$ с ветвями вниз.
Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$$

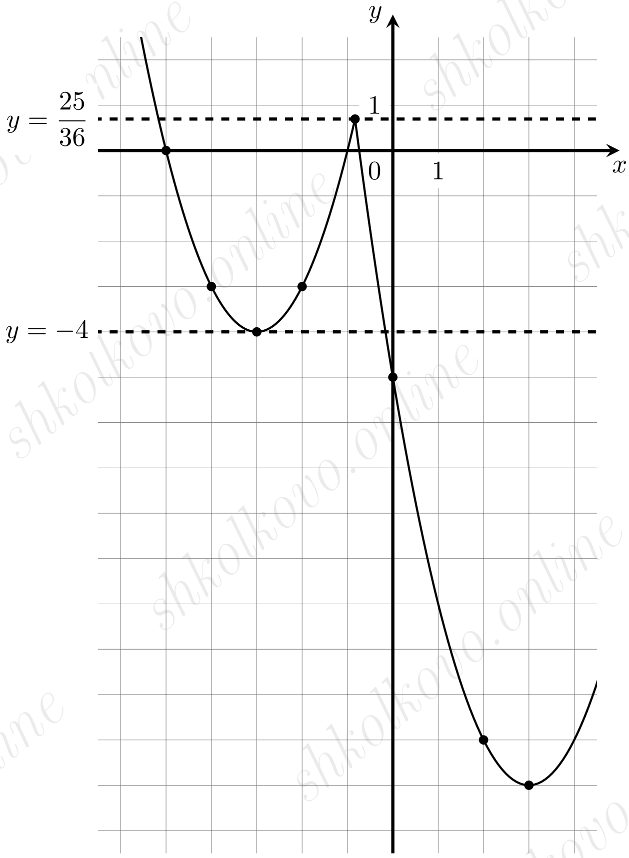
$$y_{\text{в.}} = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5 = -4$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < -2$:

x	-3	-2	-4	-5	$-\frac{5}{6}$
y	-4	-3	-3	0	$\frac{25}{36}$

Точка $\left(-\dfrac{5}{6};\ \dfrac{25}{36}\right)$ является точкой стыка двух графиков.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Найдём, когда прямая $y = m$ имеет с графиком ровно 3 общие точки.

Начнем перебирать значения m с $-\infty$.

- Если $m < -14$, то прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком.
- Если $m = -14$, то прямая $y = m$ имеет ровно 1 точку пересечения с графиком.
- Если $-14 < m < -4$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком.
- Если $m = -4$, то прямая $y = m$ имеет 3 точки пересечения с графиком.
- Если $-4 < m < \frac{25}{36}$, то прямая $y = m$ имеет 4 точки пересечения с графиком.
- Если $m = \frac{25}{36}$ то прямая $y = m$ имеет ровно 3 точки пересечения с графиком.
- Если $m > \frac{25}{36}$ то прямая $y = m$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком.

Таким образом, прямая $y = m$ имеет 3 точки пересечения с графиком, когда $m \in \left\{-4;\ \dfrac{25}{36}\right\}$.