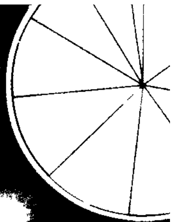
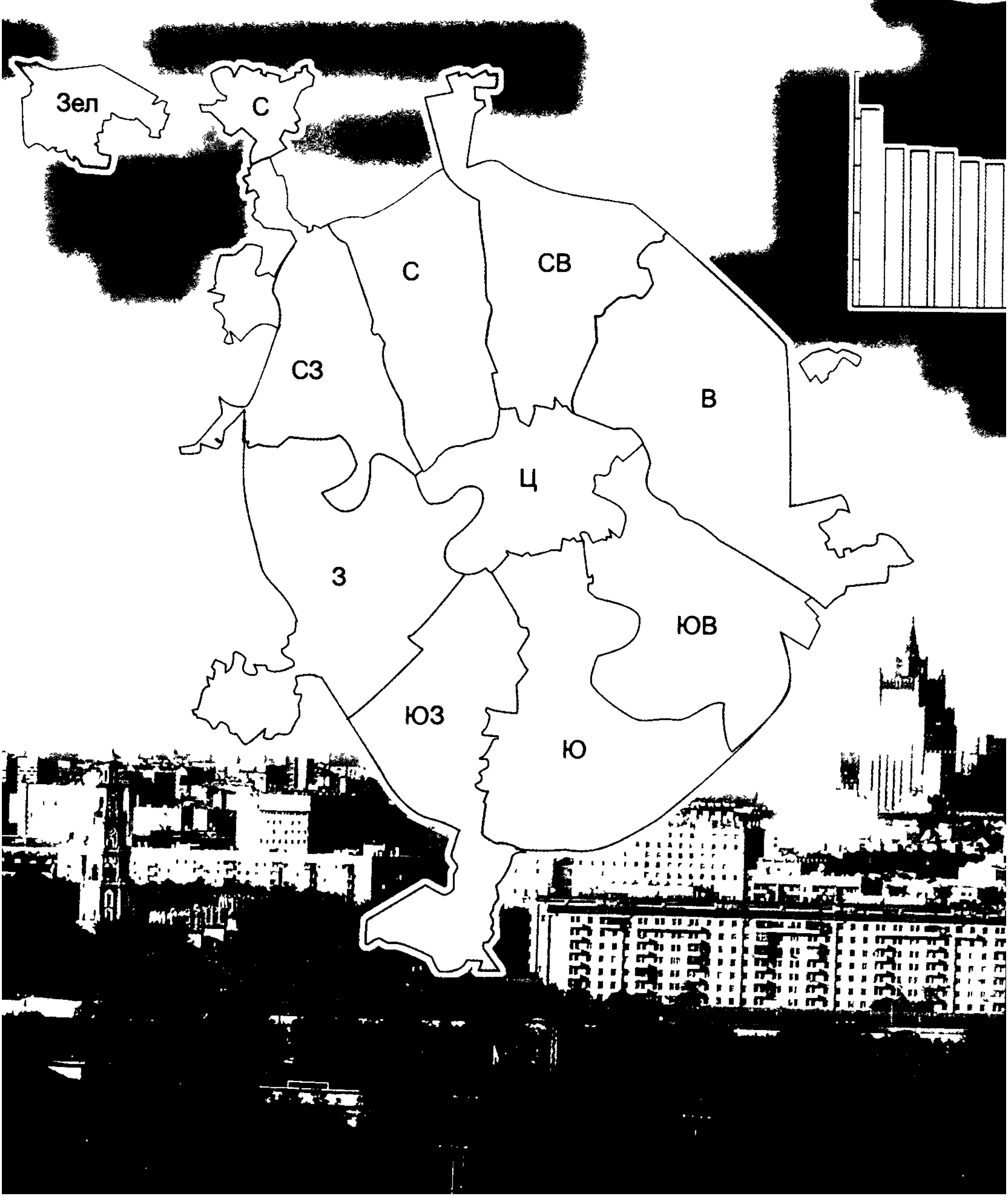
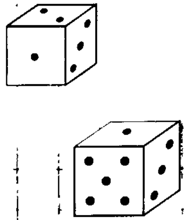
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА





Бросание двух игральных костей

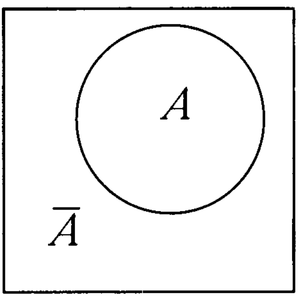


1; 1	2; 1	3; 1	4; 1	5; 1	6; 1
1; 2	2; 2	3; 2	4; 2	5; 2	6; 2
1; 3	2; 3	3; 3	4; 3	5; 3	6; 3
1; 4	2; 4	3; 4	4; 4	5; 4	6; 4
1; 5	2; 5	3; 5	4; 5	5; 5	6; 5
1; 6	2; 6	3; 6	4; 6	5; 6	6; 6

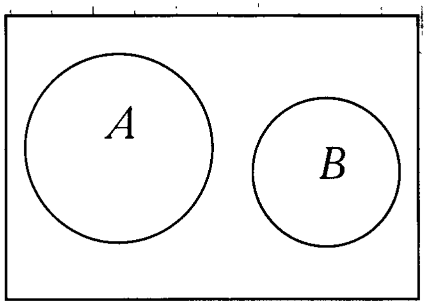
Вероятность противоположного события

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$$

Противоположные события



Несовместные события



Вероятность события в опыте
с равновозможными элементарными событиями

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N}$$

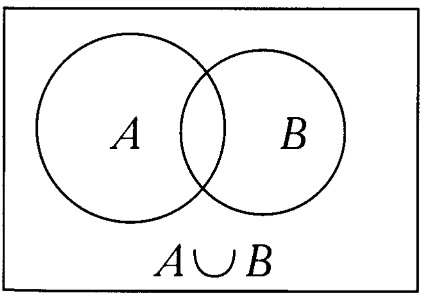
Формула сложения вероятностей

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

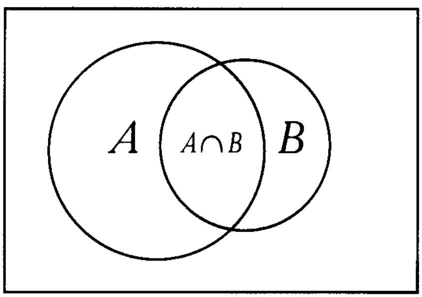
Формула умножения вероятностей
независимых событий

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Объединение
событий



Пересечение
событий



Ю. Н. Тюрин
А. А. Макаров
И. Р. Высоцкий
И. В. Ященко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

2-е издание, переработанное

*Допущено Министерством образования
и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия*

Издательство МЦНМО
ОАО «Московские учебники»
Москва 2008

ББК 22.17я72
Т98

Тюрин Ю. Н. и др.

Т98 Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — 2-е изд., переработанное. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008. — 256 с.: ил.

ISBN 987-5-94057-319-7

Учебное пособие по основам теории вероятностей и статистики рассчитано на учащихся 7—9 классов общеобразовательных учреждений. Оно также может быть использовано и в старших классах полной средней школы. В этой книге в равной мере уделяется внимание статистике и теории вероятностей и их роли в изучении явлений окружающего мира.

Книга предназначена для первичного знакомства учащихся с формами представления и описания данных в статистике, рассказывает о случайных событиях, вероятностях и их свойствах. Изложение теории вероятностей доведено до понятий о случайных величинах и законе больших чисел.

В приложениях даны примерные самостоятельные и контрольные работы для 7, 8 и 9 класса, написаны пояснения ко встречающимся терминам.

Авторы стремились сделать изложение простым и не злоупотребляли математическим формализмом.

Первое издание книги вышло в 2004 г.

ББК 22.17я72

ISBN 987-5-94057-319-7

От авторов

В содержание среднего образования России вносятся существенные изменения, в частности, в программу по математике основной школы включаются теория вероятностей и элементы статистики. Теория вероятностей — это математическая наука о случайном и закономерностях случайного. В школьном курсе математики и других естественных наук господствовала только одна идея — о существовании жестких связей между явлениями и событиями. Эти связи представлены в форме законов физики, химии, математики; даже в курсе истории нет места случайности: он построен так, что складывается впечатление, что все события предопределены и закономерны.

Но окружающий нас мир полон случайностей. Это землетрясения, ураганы, подъемы и спады экономического развития, войны, болезни, случайные встречи и так далее. Впрочем, мысль о том, что в окружающем мире много случайного, останется очевидной, но бесплодной, если не научиться измерять случайность числом, вычислять шансы различных событий. Теория вероятностей в средней школе — это признание обществом необходимости формирования современного мировоззрения, для которого одинаково важны представления и о жестких связях, и о случайном. Без знания понятий и методов теории вероятностей и статистики невозможна организация эффективного конкурентоспособного производства, внедрение новых лекарств и методов лечения в медицине, обеспечение страховой защиты граждан от непредвиденных обстоятельств, проведение обоснованной социальной политики.

Теория вероятностей как наука начала складываться в XVII веке. Источником задач для нее служили азартные игры. В частности, игра в кости, которая тогда была очень распространена в Западной Европе. В этих задачах главное — выбор равновозможных элементарных событий и правильный подсчет комбинаций этих элементарных событий. До сих пор, как анахронизм, во многих начальных курсах теории вероятностей сохраняется «родимое пятно» — преобладание комбинаторных задач, связанных с азартными играми. Такие задачи есть и в нашем курсе теории вероятностей, но они даны, в основном, для упражнений и иллюстраций.

Одновременно с развитием теории вероятностей стала развиваться статистика. К XVII веку относятся и первые научные применения статистики в демографии и страховании, идеи о случайных ошибках в измерениях.

От авторов

Теория вероятностей и статистика долгое время развивались как естественные науки, хотя и с большой математической составляющей. В отрасль математики теория вероятностей превратилась только в XX веке. На аксиоматическую основу ее поставил наш великий соотечественник А. Н. Колмогоров. До него некоторые сложные понятия теории вероятностей не были полностью изучены. Впрочем, на «нижних этажах» этой науки, которые в первую очередь и нужны для приложений, все было ясно и ранее. В нашем курсе мы не касаемся аксиоматики Колмогорова, но пользуемся введенными им и общепринятыми сейчас понятиями: случайный эксперимент, элементарное событие и так далее.

В этой книге теория вероятностей и статистика представлены как естественные науки, в которых наибольшую ценность представляет сложившаяся система взглядов, выработанные основные понятия и их связи с реальностью. При таком подходе математические доказательства отступают на второй план, а математические методы играют ту же роль, что и в физике или механике. Эта книга существенно отличается от учебника математики тем, что многие вопросы и упражнения не подразумевают однозначных ответов. Эти вопросы предназначены в большей степени для обсуждения. Учащиеся могут иметь разные мнения по тем или иным вопросам и стараться их обосновать.

Изложение теории вероятностей начинается со статистики. Обсуждается представление данных в виде таблиц и диаграмм; объясняется, как с помощью немногих числовых характеристик можно описать массивы данных. Изучая совокупности чисел, мы естественно приходим к понятию случайной изменчивости, подготавливая переход к изучению случайности, то есть к теории вероятностей.

Обсуждая вопросы статистики, авторы стремились в качестве учебного материала сообщать реальные сведения о народонаселении, об экономике и сельском хозяйстве России, полагая, что знакомство с основными принципами сбора, анализа и представления данных об обществе и государстве приобщает школьников к общественным интересам. Одновременно обсуждаются различные данные, показывая, как статистика позволяет описывать мир, окружающий школьника, и явления в повседневной жизни.

Статистическая часть курса отнесена к изучению в седьмом классе. Восьмой и девятый класс отведены для изучения теории вероятностей. В восьмом классе вводятся понятия случайного эксперимента, элементарных событий, событий и их вероятностей, объединения и пересечения событий, формулы сложения и умножения вероятностей, понятие о независимости экспериментов и событий. В эту часть курса включена и небольшая глава о комбинаторике.

В девятом классе изучаются случайные величины, их распределения и числовые характеристики — математическое ожидание и дисперсия. В этом же классе изучаются испытания Бернулли — одна из базовых схем теории вероятностей. Испытания Бернулли одновременно являются примером независимых испытаний, примером сложного случайного эксперимента и примером важной случайной величины — «числа успехов». Вычисление математического ожидания и дисперсии для «числа успехов» дают нам возможность сформулировать один из основных законов теории вероятностей — закон больших чисел. Испытания Бернулли позволяют объяснить, как с помощью случайного выбора можно экспериментально изучать свойства больших совокупностей — выборочный метод исследования, а также объяснить статистическую основу социологических опросов и какая при этом достигается точность выводов. Изложенный материал по теории вероятностей позволяет обсудить и некоторые другие социальные явления, например, страхование и лотереи.

Содержание книги избыточно по сравнению с отводимым на изучение теории вероятностей учебным временем, зато изложение получилось достаточно цельным и законченным. Курс завершается законом больших чисел, который показывает одну из связей случайного с закономерным, одно из проявлений закономерности в случайном. Две важные темы «Бином Ньютона» и «Треугольник Паскаля» не относятся непосредственно к курсу теории вероятностей и статистики, поэтому они вынесены в приложение. Материал книги также будет полезен при углубленном изучении математики и послужит основой для подготовки курсов по выбору, особенно по социально-экономическому профилю.

Авторы курса будут признательны за отклики, замечания и предложения по совершенствованию курса. Наш адрес: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11, МЦНМО, Теория вероятностей. E-mail: stat@mccme.ru.

Глава I. Таблицы

Когда сведений очень много, их нужно упорядочивать. Таблица — самый простой способ упорядочить данные. С некоторыми таблицами вы уже имели дело. Это таблицы сложения и умножения чисел, таблицы спряжения глаголов. Таблицами являются: расписание уроков, страницы вашего школьного дневника, оглавление учебника. Государственные и коммерческие службы регулярно собирают обширные сведения об обществе и окружающей среде. Эти данные публикуют в виде таблиц. Рассмотрим примеры некоторых таблиц и научимся извлекать из них информацию.

1. Статистические данные в таблицах

Население крупнейших городов России

Таблица 1 содержит сведения о числе жителей крупнейших городов России с населением более 1 млн. человек по данным перепини населения в 2002 г. Города указаны в алфавитном порядке, а число их жителей указано в тысячах человек. Данные приведены за несколько лет, чтобы можно было судить об изменениях населения городов.

По этой таблице легко найти ответы на следующие вопросы.

1. Сколько было в России городов с населением более миллиона в 2002 г.? Для ответа надо пересчитать города в таблице 1. Их 13.

2. Каково было население Москвы в 2006 г.? Найдите строку таблицы, относящуюся к Москве, и столбец с данными 2006 г. В 2006 г. в Москве проживало 10 425 тысяч человек.

3. Какой город в России в 2006 г. был вторым по числу жителей? Для ответа на этот вопрос надо просмотреть все числа в столбце 2006 г. и выбрать из них второе по величине. Это 4581. Оно находится в строке, отвечающей Санкт-Петербургу.

4. На сколько выросло население Москвы в 2006 г. по сравнению с 2002 г.? Для ответа на этот вопрос следует найти разность числа жителей Москвы в 2006 и 2002 гг. Она равна 10 425 – 10 358 = 67, т. е. население Москвы выросло на 67 тысяч человек.

Таблица 1 позволяет получить ответы и на многие другие вопросы. Некоторые мы обсудим позже.

1. Статистические данные в таблицах

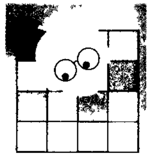
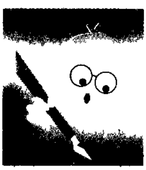


Таблица 1. Города России с числом жителей более 1 млн. человек по данным переписи 2002 г.

Город	Население, тыс. чел.			
	1979	1989	2002	2006
Волгоград	926	999	1013	1025
Екатеринбург	1210	1296	1293	1308
Казань	989	1085	1105	1113
Москва	8057	8878	10 358	10 425
Нижний Новгород	1342	1400	1311	1284
Новосибирск	1309	1420	1426	1397
Омск	1016	1149	1134	1139
Пермь	989	1041	1000	993
Ростов-на-Дону	925	1008	1070	1055
Самара	1192	1222	1158	1143
Санкт-Петербург	4569	4989	4669	4581
Уфа	977	1080	1042	1030
Челябинск	1030	1107	1078	1093



Упражнения

1. Пользуясь таблицей, найдите численность населения
а) Новосибирска в 2002 г.; б) Казани в 1979 г.

2. В каком городе население в 1989 г. составляло 1400 тысяч человек?

3. Сколько городов в России имело население более 1 млн. человек в 1979 г., в 2006 г.?

4. На сколько изменилось население Санкт-Петербурга в 2006 г. по сравнению с 1989 г.?

5. На сколько изменилось население Екатеринбурга в 2006 г. по сравнению с 1989 г.?

6. Сколько городов в России в 2002 г. имело население более 1500 тысяч человек?

Глава I. Таблицы

Урожайность зерна

Для России всегда было важно, насколько хорошо ее снабжает зерном сельское хозяйство. Это важно сейчас и будет важно в будущем. К зерну, согласно принятой в статистике классификации, относится пшеница, ячмень, рожь, гречиха, просо, горох, фасоль и некоторые другие культуры. Главной зерновой культурой является пшеница.

Просо Ячмень Кукуруза Рожь Пшеница Рис

На продовольствие идет относительно небольшая часть зерна (в России это примерно 18 млн. тонн ежегодно, главным образом пшеницы). Бóльшая часть зерна идет на корм скоту. По оценкам экспертов, сейчас годовая потребность России в зерне составляет примерно 70—75 млн. тонн.

Таблица 2 содержит некоторые сведения о зерновом производстве в России с 2000 по 2006 г. Производство зерна и пшеницы дано в миллионах тонн (млн. тонн); урожайность — в центнерах с гектара (ц/га).

Таблица 2. Производство зерна в России

Показатель	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Производство зерновых, млн. т	65,5	85,2	86,6	67,2	78,1	78,2	78,6
Урожайность зерновых, ц/га	15,6	19,4	19,6	17,8	18,8	18,5	18,9
Производство пшеницы, млн. т	34,5	47,0	50,6	34,1	45,4	47,7	45,0
Доля пшеницы, %							

1. Статистические данные в таблицах

Упражнения

7. Какой была урожайность зерновых в 2000 г.?
8. В каком году урожайность составила 19,4 ц/га?
9. В каком году урожайность была наибольшей?
10. В каком году урожайность была наименьшей?
11. Для каждого года в таблице найдите, какую долю в урожае составляла пшеница (в процентах). Заполните нижнюю строку в таблице 2.
12. В каком году доля пшеницы в урожае зерна была наибольшей?
13. В каком году доля пшеницы в урожае зерна была наименьшей?
14. В какие годы доля пшеницы превышала 60 %?

Производство электроэнергии

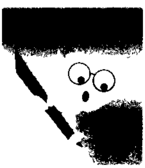
Важным показателем развития страны является уровень производства электрической энергии. Производство электроэнергии практически совпадает с потреблением, поскольку электрическую энергию нельзя хранить в промышленных масштабах. Электричества производят столько, сколько нужно промышленности, сельскому хозяйству и населению. В быту количество потребленной электрической энергии измеряют в киловатт-часах (кВт · ч); в стране – в миллиардах кВт · ч.

В таблице 3 указано количество произведенной в России электроэнергии с 1998 по 2006 г.

Таблица 3. Производство электроэнергии в России, млрд. кВт · ч

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Электроэнергия	827	846	878	891	891	916	931	953	991

По количеству производимой электроэнергии можно в некоторой степени судить о состоянии экономики страны. А годовые темпы роста производства электроэнергии дают представление о темпах роста ее экономики.



Упражнения

15. Сколько электроэнергии было произведено в России в 2000 г.?
16. В каком году электроэнергии было произведено больше: в 1999 г. или в 2000 г.?
17. В каком году в России было произведено больше всего электроэнергии?
18. В какие годы в России произведено одинаковое количество электроэнергии?

19. В каких единицах измеряют количество потребляемой электроэнергии в быту и в промышленности?

20. Вычислите (в процентах), как изменялось год от года производство электрической энергии в России в 1998–2006 гг.

Указание. Например, производство электроэнергии в 1999 г. выросло на 19 млрд. кВт·ч по сравнению с 1998 г. Изменение составляет $19:827 \times \times 100\,\% \approx 2{,}3\,\%$. Другой пример: производство электроэнергии в 2003 г. по сравнению с 2002 г. выросло на 24 млрд. кВт·ч. Рост составляет $24:891 \times \times 100\,\% \approx 2{,}7\,\%$.

21. Пользуясь результатами предыдущей задачи, заполните таблицу изменений производства электроэнергии по данному образцу:

Год	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Изменение по отношению к предыдущему году, %	2,3				2,7			

2. Поиск информации в таблицах

Поговорим более подробно о поиске информации в таблицах на примере расписания движения поездов из Москвы в Санкт-Петербург. Фрагмент этого расписания приведен в таблице 4.

В таблице 4 много разнородных сведений о поездах, идущих из Москвы в Санкт-Петербург. Для каждого поезда в отдельной строке указаны его номер и категория, время отправления из Москвы, дни отправления, время в пути и время прибытия в Санкт-Петербург. Для удобства поиска вся эта информация разбита на столбцы, каждый из которых имеет свой заголовок, размещенный в первой строке. Эта строка с заголовками столбцов называется шапкой таблицы.

В каждой строке приведены сведения только об одном поезде. Порядок столбцов в расписании движения выбран так, чтобы проще было найти информацию, интересующую пассажира в первую очередь.

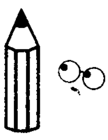
Заметим, что для ответа на вопрос о времени отправления поезда № 38 не нужно изучать все расписание. Достаточно найти в таблице один столбец и одну строку. В этом главное преимущество таблицы перед текстом.

Таблицы облегчают поиск необходимых сведений, не заставляя изучать всю имеющуюся информацию.

2. Поиск информации в таблицах

Таблица 4. Расписание движения поездов из Москвы в С.-Петербург

Номер и название поезда	Время отправления из Москвы	Время прибытия	Время в пути	Дни отправления
2 «Кр. Стрела»	23:55		8:00	Ежедневно
4 «Экспресс»	23:59		8:01	Ежедневно
6 «Никол. экспресс»	23:30	7:40	8:10	Ежедневно, кроме субботы
20 «Мегаполис»	0:45	9:00	8:15	Ежедневно, кроме воскресенья
24 «Юность»	12:30		7:21	Ежедневно
26 «Смена»	23:00	6:41		Ежедневно
28 «Северн. Пальмира»	21:30	5:28	7:58	Ежедневно
30	1:05	9:37	8:32	Ежедневно, кроме воскресенья
38 «Аф. Никитин»	0:30	8:48	8:18	Ежедневно
56	20:18	5:00	8:42	Ежедневно
160 «Аврора»	16:30	22:00	5:30	Ежедневно
166 «Невский экспресс»	18:30	23:00	4:30	Ежедневно, кроме воскресенья



Пример. Группа школьников должна уехать в Санкт-Петербург из Москвы после семи часов вечера, но не позже 22:00. Чтобы выбрать подходящие поезда, не нужно изучать всю таблицу. Достаточно просмотреть колонку «Время отправления из Москвы» и выбрать в ней подходящее время отправления поезда. Таких поездов всего 2. Это поезда № 28 и № 56. Поезд № 28 отходит из Москвы в 21:30, а поезд № 56 – в 20:18. Таким образом, таблица не только облегчает поиск информации, но и **позволяет легко сравнивать однотипные сведения и делать обоснованный выбор.**

Строки и столбцы обычно отделяют друг от друга горизонтальными и вертикальными линиями. Однако возможны и другие способы выделения строк и столбцов. Скажем, в таблицах биржевых новостей одну строку отделяют от другой цветом, и таблица похожа на «зебру» пешеходного перехода.

Мы узнали, что таблицы предназначены для упорядочивания большого количества сведений.

Упражнения

1. Пользуясь таблицей 4, ответьте на вопросы:

а) когда приходит в С.-Петербург поезд № 2;

б) когда уходит из Москвы поезд № 28;

в) по каким дням отправляется из Москвы в С.-Петербург поезд № 56;

г) сколько времени находится в пути поезд № 24;

д) какие поезда прибывают на вокзал, когда закрыто метро? (Метро закрывается для входа пассажиров в 0:30 и открывается в 5:40.)

2. Пользуясь таблицей 4, ответьте на вопросы:

а) каждый ли день отправляется из Москвы в С.-Петербург поезд № 20;

б) сколько поездов отходит из Москвы в С.-Петербург между 20:00 и 24:00;

в) какие поезда отправляются из Москвы в С.-Петербург ежедневно;

г) какое время находится в пути поезд № 26?

3. Укажите в таблице 4 поезд, который имеет:

а) наименьшее время в пути;

б) наибольшее время в пути.

4. Пользуясь таблицей 4, ответьте на вопросы:

а) сколько времени в пути находится поезд № 942;

б) когда отходит из Москвы поезд № 6;

в) какие поезда не ходят по воскресеньям;

г) какие поезда приходят в С.-Петербург вечером (после 17:00)?

5. Найдите время прибытия поезда № 4.

6. Иван Иванович хочет ехать из Москвы в Санкт-Петербург и приехать не раньше 7:00, чтобы выспаться по дороге, но не позже 8:30, чтобы успеть к началу рабочего дня. Какие поезда ему можно посоветовать?

7. Перечислите номера поездов, которые отправляются из Москвы в С.-Петербург в интервале от 0:00 до 3:00 ночи.

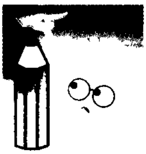
8. Найдите поезда, которые приходят в С.-Петербург в интервале от 5:00 до 9:00 утра.

9. Школьники решили отправиться из Москвы в С.-Петербург поездом, уходящим из Москвы не позднее 11 часов вечера и приходящим в С.-Петербург утром. Сколько поездов из приведенного расписания им подходит?

3. Вычисления в таблицах

В задачах с расписанием движения поездов мы видели, что значения одного столбца таблицы могут быть вычислены по значениям в других столбцах.

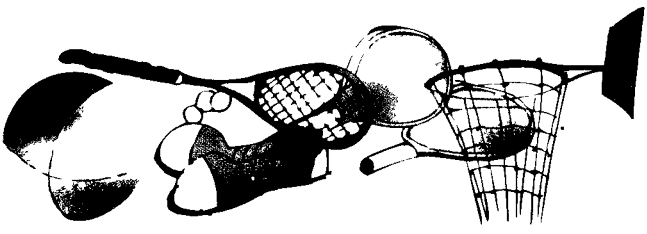
Таблицы оказываются удобной формой подведения итогов. Вспомните таблицу умножения или таблицу спортивных состязаний. В этих таблицах одни данные вычисляются с помощью других. Часто встречающийся на практике пример — смета расходов.



Пример. Спортивный комитет выделил на закупку спортивного инвентаря для летнего лагеря 50 000 рублей. Было решено закупить футбольные, волейбольные и баскетбольные мячи, ракетки, воланы и сетку для бадминтона. Чтобы понять, как распределить деньги и сколько товаров купить, организаторы составили смету расходов в виде таблицы 5.

Таблица 5. Смета расходов на покупку спортивного инвентаря

№	Наименование	Ед. измерения	Количество	Цена ед., р.	Стоимость, р.
1.	Мяч футбольный	шт.	17	1000	
2.	Мяч волейбольный	шт.	20	800	
3.	Мяч баскетбольный	шт.	10	400	
4.	Ракетка	шт.	32	250	
5.	Воланы	коробка	10	300	
6.	Сетка	шт.	4	500	
	Итого:				



В столбце «Стоимость» подводятся итоги по строке: стоимость равна цене, умноженной на количество купленных единиц товара.

Последняя строка в смете отличается по своему виду от предыдущих. В ней подводят суммарные итоги в одном или нескольких столбцах таблицы.

Ясно, что распределить деньги можно по-разному. Предположим, что мы решим покупать только футбольные, волейбольные мячи, ракетки для бадминтона и воланы. Тогда смета может быть такой, как в таблице 6.

Таблица 6. Смета расходов

№	Наименование	Ед. измерения	Количество	Цена ед., р.	Стоимость, р.
1.	Мяч футбольный	шт.	30	1000	30 000
2.	Мяч волейбольный	шт.	15	800	12 000
3.	Ракетка	шт.	24	250	6000
4.	Воланы	коробка	10	300	3000
	Итого:				51 000

В последней строке видно, что мы превысили выделенную сумму на 1000 рублей. Придется менять смету расходов, чтобы уложиться в выделенную сумму. Можно уменьшить количество футбольных мячей на один. Тогда как раз получится 50 000 рублей.

Можно поступить иначе: купить на один волейбольный мяч и одну коробку воланов меньше. Экономия составит $800 + 300 = 1100$ рублей, и общая сумма будет равна 49 900 р. Но в этом случае останется 100 рублей, на которые уже ничего купить нельзя.

Доли и проценты в таблицах

Часто приходится вычислять долю одной или нескольких частей в едином целом. Если исходные данные записаны в таблице, то и полученные доли также принято записывать в таблицу. Покажем на примере, как это делается.

Наблюдения показывают, что за последние 100 лет расселение жителей России сильно изменилось. Россия из сельскохозяйственной страны превратилась в промышленную. В таблице 7 даны сведения о городском и сельском населении Российской империи в 1897 г. и Российской Федерации в 2002 г.

Вычислим процентную долю городского и сельского населения в указанные годы. Доля городского населения в процентах в 1897 г. составляла $16{,}5 : 126{,}4 \cdot 100\,\% \approx 13\,\%$, а доля сельского населения была 87 %. Точно так же проводятся вычисления и для 2002 г.

3. Вычисления в таблицах

Таблица 7. Население России в 1897 и 2002 гг., млн. чел.

Год	Городское население	Сельское население	Всего
1897	16,5	109,9	126,4
2002	106,5	38,7	145,2

Для удобства сопоставления полученных данных поместим их в таблицу.

Таблица 8. Доля городского и сельского населения России в 1897 и 2002 гг., в %

Год	Доля городского населения	Доля сельского населения
1897	13	87
2002	73	27

Мы рассказали о том, что в таблицы часто заносят результаты вычислений, познакомились с важным видом таблиц — сметами. А еще увидели, как изменился за 105 лет состав населения России.

Упражнения

1. По таблице 5 ответьте на вопросы:

а) Какой из товаров является самым дорогим?

б) Какой из товаров является самым дешевым?

в) Какого инвентаря решили купить больше всего? Как вы думаете, почему?

г) Какого инвентаря решили купить меньше всего? Как вы думаете, почему?

2. Начертите таблицу 5 в тетради, вычислите стоимость указанного количества каждого вида товара и заполните последний столбец. Ответьте на вопросы:

а) на какой вид инвентаря планируется потратить самую большую сумму?

б) на какой вид инвентаря планируется потратить самую маленькую сумму?

3. Предложите еще один способ изменения таблицы 6 так, чтобы уложиться в 50 000 рублей без остатка, не исключая ни одного вида инвентаря.

4. Используя данные из таблицы 5 о стоимости спортивных товаров, составьте собственную смету расходов на 50 000 рублей, включающую только два наименования товаров. Уложились ли вы в выделенную сумму? Если нет, то исправьте свою смету так, чтобы уложиться в 50 000 рублей.

5. Составьте собственную смету для покупки трех из перечисленных видов спортивного инвентаря на общую сумму 10 000 рублей.

6. По таблице 8 найдите:

а) какую долю в процентах составляло городское население России в 2002 г.;

б) насколько выросла доля городского населения России с 1897 г. по 2002 г.?

7. По таблице 6 найдите:

а) какую долю составляют расходы на футбольные мячи в общей сумме расходов;

б) какую долю составляют расходы на волейбольные мячи в общей сумме расходов.

Составьте таблицу долей расходов на каждый тип инвентаря.

8. Школьный буфет закупил 50 шоколадных батончиков, 80 булочек, 40 пачек печенья, 100 бутылок воды. Стоимость шоколадного батончика — 10 рублей, булочки — 4 рубля, пачки печенья — 10 рублей, бутылки воды — 12 рублей.

а) Составьте смету расходов буфета и выясните, какая сумма потребовалась для оплаты полученного товара.

б) Вычислите долю стоимости каждого вида товара в смете и составьте таблицу.

9. Книжный магазин начал продажу пяти новых книг по цене 30, 50, 80, 100 и 200 рублей соответственно. За день было продано 2 экземпляра первой книги, 1 — второй, 4 — третьей, 3 — четвертой и 6 — пятой.

а) Составьте таблицу продаж и вычислите, какую сумму выручил магазин за книги.

б) Вычислите, какую долю составила выручка за каждую из книг в общей выручке.

10. В день рождения родители дали Саше 300 рублей на фрукты. Саша решил купить бананы, яблоки, мандарины и груши. Стоимость 1 кг бананов — 25 рублей, яблок — 30 рублей, мандаринов — 40 рублей и груш — 35 рублей.

а) Сколько денег будет потрачено, если купить по килограмму каждого вида фруктов?

б) Составьте смету расходов с учетом того, что фруктов каждого вида надо купить хотя бы по одному килограмму. Уложились ли вы в выделенные деньги?

в) Можно ли составить смету так, чтобы купить целое число килограммов каждого вида фруктов и истратить все деньги?

4. Крупнейшие города России

На практике часто необходимо знать, как изменился тот или иной показатель спустя некоторое время. Рассмотрим, как изменилась численность населения крупнейших городов России с 2002 по 2006 гг. Эти данные приведены в таблице 9, которая является продолжением таблицы 1.

Таблица 9. Города России с числом жителей более 1 млн. человек

Город	Население, тыс. чел.			Изменение населения в 2006 г. по сравнению с 2002 г., тыс. чел.	Изменение населения в 2006 г. по сравнению с 2002 г., в %
	1979	2002	2006		
Волгоград	926	1013	1025	12	1,18
Екатеринбург	1210	1293	1308	15	1,16
Казань	989	1105	1113	8	0,72
Москва	8057	10 358	10 425	67	0,65
Нижний Новгород	1342	1311	1284	−27	−2,06
Новосибирск	1309	1426	1397	−29	−2,03
Омск	1016	1134	1139	5	0,44
Пермь	989	1000	993	−7	−0,7
Ростов-на-Дону	925	1070	1055	−15	−1,4
Самара	1192	1158	1143	−15	−1,30
Санкт-Петербург	4569	4669	4581	−88	−1,88
Уфа	977	1042	1030	−12	−1,17
Челябинск	1030	1078	1093	15	1,39

Чтобы получить изменение населения в каждом городе, мы из числа жителей города в 2006 г. вычли число жителей в 2002 г. Положительная разность означает увеличение населения, а отрицательная — уменьшение. Обычно изменения указывают в процентах. Найдем, например, сколько процентов составляет изменение населения Волгограда в 2006 г. по сравнению с 2002 г.:

$$12 : 1013 \cdot 100\,\% \approx 1{,}2\,\%.$$

Полученные данные удобно занести в ту же таблицу 9.

Мы познакомились с тем, как в таблицы заносят данные об изменении разных величин, в частности населения крупнейших городов страны.

Упражнения

1. В каких городах население выросло в 2006 г. по сравнению с 2002 г., в каких — сократилось?

2. В каком городе население выросло на самое большое число жителей с 2002 г. по 2006 г.?

3. В каком городе население сократилось на самое большое число жителей с 2002 г. по 2006 г.?

4. В каком городе население выросло больше всего в процентном отношении с 2002 г. по 2006 г.:

а) для всех городов таблицы; б) для всех городов, исключая Москву и С.-Петербург?

5. В каком городе население сократилось больше всего в процентном отношении с 2002 г. по 2006 г.:

а) для всех городов таблицы; б) для всех городов, исключая Москву и С.-Петербург?

6. Составьте таблицу изменения населения крупнейших городов России с 1979 г. по 2006 г.

7. Население какого из городов России выросло меньше всего с 1979 г. по 2006 г.?

8. Составьте таблицу процентного изменения населения крупнейших городов России с 1979 г. по 2006 г.

9. Население какого из городов России выросло больше всего в процентном отношении с 1979 г. по 2006 г.?

5. Таблицы с результатами подсчетов

В классе был проведен опрос о том, у кого какие домашние животные. Получился следующий список:

Собака, собака, кошка, никого, кошка, рыбки, кошка, никого, кошка, кошка, птицы, никого, собака, никого, кошка, птицы, собака, кошка, собака, никого, рыбки, кошка, собака, собака, кошка, никого, черепаха, никого, собака, рыбки, кошка, собака, кошка.

Список не показывает прямо, сколько каких животных живет у школьников. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно провести подсчеты. Проще всего это сделать так. Начнем составлять таблицу, читая список. В первый столбец будем вписывать виды животных по мере их появления в списке. Во втором столбце будем рисовать черточки, а последний столбец отведем для окончательных результатов. Начало нашей таблицы после обработки первых десяти ответов будет выглядеть, как показано в таблице 10.

Таблица 10. Подсчет животных

Животное	Встретилось в списке	Всего
Собака	ǀǀ	
Кошка	卌	
Никого	ǀǀ	
Рыбки	ǀ	

Каждый очередной ответ в списке будем отмечать черточкой ǀ во втором столбце. Когда число черточек достигает пяти, перечеркнем четыре черточки одной горизонтальной чертой, как показано в строке «Кошка». Запись 卌 означает пять, в ней всего пять черточек. Так делается для того, чтобы потом было проще подсчитать число черточек в каждой строке. Обработав весь список, получим такую таблицу:

Таблица 11. Подсчет животных

Животное	Встретилось в списке	Всего
Собака	卌 ǀǀǀǀ	9
Кошка	卌 卌 ǀ	11
Никого	卌 ǀǀ	7
Рыбки	ǀǀǀ	3
Птицы	ǀǀ	2
Черепаха	ǀ	1

Теперь легко подсчитать животных каждого вида. Собак в нашем списке отмечено 卌 ǀǀǀǀ, т. е. пять и еще четыре. Всего 9. Кошки живут у 11 школьников. Птицы живут только у двух школьников, рыбки — у трех, а черепаха — у одного.

Заметим, что, составляя таблицу, мы прочитали список лишь один раз. Если бы мы считали сначала собак, потом кошек и т. д., нам бы пришлось просматривать список неоднократно. Чем больше различных ответов в списке, тем больше раз его пришлось бы просмотреть.

Описанный способ подсчетов в таблице часто используют социологи при ручной обработке социологических анкет, продавцы для учета проданной продукции и другие специалисты.

В этом пункте рассказывалось о способе подсчета данных с помощью таблиц.

Упражнения

1 Какие животные, согласно таблице 11, чаще всего живут дома у школьников?

2. Каких животных из таблицы 11 редко держат в домашних условиях?

3 Используя список животных, составьте таблицу, показывающую число четвероногих, двуногих животных и рыб, живущих у школьников. (Ответ «никого» в таблицу не включать.)

6. Таблицы с результатами измерений

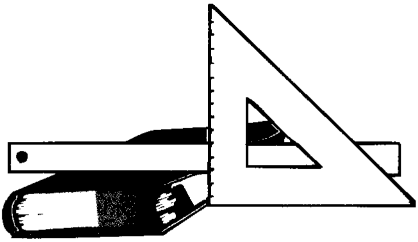
Таблицы часто используют для записи результатов однотипных измерений. Если мы хотим сравнить толщину школьных учебников по разным предметам, то можно составить таблицу числа страниц в учебниках, как это сделано в таблице 12.

Таблица 12. Число страниц в учебниках 9 класса

Предмет	Число страниц	Толщина книги, мм
Алгебра	384	22
Литература	320	20
Физика	190	16
История	424	23
Биология	240	16
Химия	208	14

Точное число страниц указано в описании книги (ее «выходных данных») на второй или на последней странице. А вот если мы составим такую таблицу, открывая книгу на последних страницах, то можем совершить ошибки, поскольку одна или несколько последних страниц книги не пронумерованы. Нам придется самим считать эти страницы. При этом могут возникать ошибки.

Толщину книги можно измерить просто с помощью линейки или угольника. Результаты этих измерений занесены в последний столбец таблицы 12. Измерение толщины книги с помощью линейки не очень точная процедура. Укажем несколько возможных причин ошибок в таких измерениях. Во-первых, между страницами книги есть пустоты. Они тем больше, чем более старый и растрепанный учебник. Эти пустоты можно уменьшить, плотно сжав книгу. Одно это изменяет толщину школьного учебника на 1—2 мм. Во-вторых, результаты измерения зависят от угла, под которым линейка приложена к книге. В-третьих, когда один из краев книги попадает между делениями линейки, мы должны принять решение, какое значение выбрать.



Этот пункт рассказал нам о том, что таблицы удобно применять для записи результатов измерений и наблюдений.

Упражнения

1. Возьмите учебники, которые вы принесли с собой в школу. Определите число страниц в каждом учебнике двумя способами:

а) откройте книгу в конце, найдите последнюю страницу с номером и добавьте число ненумерованных страниц;

б) найдите число страниц в «выходных данных» книги. Составьте таблицу:

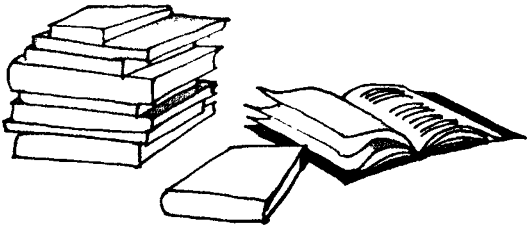
Число страниц в учебниках

Предмет	Число страниц, подсчитанное самостоятельно	Число страниц по выходным данным

Сравните полученные результаты. Обнаружили ли вы расхождение?

2. Измерьте толщину принесенных в школу учебников с помощью линейки или угольника и занесите эти данные в таблицу. Как вы думаете, насколько точны эти измерения?

3. Сравните результаты измерений учебника алгебры с результатами, полученными вашими одноклассниками при измерении таких же учебников. Есть ли расхождения в полученных данных?



4. Продавцы небольших книжных киосков часто отмечают число проданных за день книг в общей ведомости, для того чтобы в конце дня быстро подвести итоги работы.

Часть такой ведомости дана в таблице 13.

Таблица 13. Учетная ведомость продажи книг

	Название книги	Цена, р.	Продано	Всего	Выручка
1.	«Алиса в стране чудес»	120	ǀǀ		
2.	«Властелин колец»	150	~~ǀǀǀǀ~~ ǀǀ		
3.	«Вредные советы»	90	ǀǀǀ		
4.	«Гарри Поттер и орден Феникса»	250	~~ǀǀǀǀ~~ ~~ǀǀǀǀ~~ ǀǀǀ		
5.	«Северное сияние»	120	ǀ		
			Общая сумма:		

а) Заполните в таблице столбец «Всего».

б) Заполните столбец «Выручка».

в) Посчитайте общее число проданных книг и суммарную выручку и заполните соответствующие ячейки

5. Пользуясь таблицей 13 и результатами задачи 4, составьте таблицу долей выручки от продажи каждой книги.

6. В таблице 14 указаны оценки за четверть по математике, русскому и иностранному языку для всех учащихся класса.

6. Таблицы с результатами измерений

Таблица 14. Оценки за четверть

	Фамилия, имя	Математика	Рус. язык	Ин. язык
1.	Андреева О.	4	3	5
2.	Авдеев И.	4	4	4
3.	Баранкин С.	3	4	3
4.	Бодров О.	5	4	5
5.	Волин С.	5	5	5
6.	Волкова Е.	3	5	4
7.	Галкин П.	3	4	3
8.	Данилов М.	5	3	5
9.	Евсеева С.	4	5	5
10.	Жуков Д.	5	4	4
11.	Иванова Е.	4	5	5
12.	Кузнецов И.	5	4	5
13.	Караваева А.	3	3	3
14.	Кузовлев П.	3	4	3
15.	Ломов Д.	3	3	3
16.	Макаров А.	4	3	4
17.	Мельникова М.	5	4	3
18.	Надюшина С.	4	5	4
19.	Норов П.	4	4	3
20.	Оганов А.	5	3	4
21.	Островая Е.	5	4	5
22.	Петров С.	4	5	5
23.	Петрова И.	4	4	5
24.	Пронина Д.	5	5	4
25.	Шашкин П.	4	3	4
26.	Яковлева Н.	3	4	4

Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу результатов подсчета:

а) учеников, которые имеют оценки 5, 4 и 3 по математике;

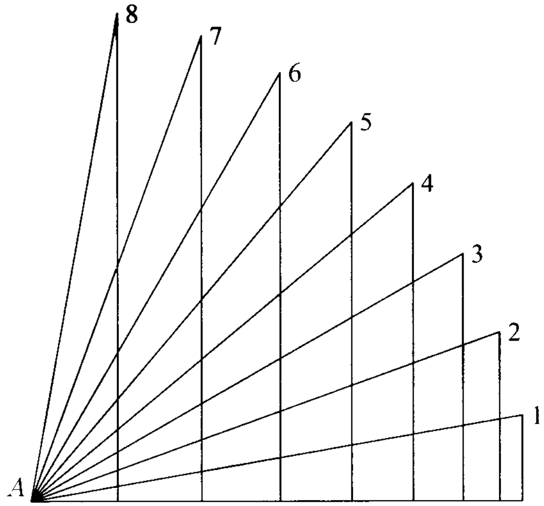
б) учеников, которые имеют оценки 5, 4 и 3 по русскому языку;

в) учеников, которые имеют оценки 5, 4 и 3 по иностранному языку;

г) мальчиков, которые имеет оценки 5, 4 и 3 по математике;

д) девочек, которые имеют оценки 5, 4 и 3 по математике.

7. На рисунке изображено 8 прямоугольных треугольников. С помощью транспортира и линейки составьте таблицу результатов измерений острого угла при вершине A каждого треугольника, длины его горизонтального катета и гипотенузы.



8. Составьте таблицу числа страниц и толщины 6—7 школьных учебников. Вычислите по таблице суммарную толщину учебников в миллиметрах. Сложите учебники стопкой и измерьте их суммарную толщину. Сравните полученные результаты.

9. Два друга решили выяснить, как часто используются те или иные буквы в русском языке. Для этого они решили подсчитать и сравнить число некоторых букв в небольших прозаических отрывках из разных произведений А. С. Пушкина:

Первый отрывок («Дубровский»)

По этим приметам немудрено будет вам отыскать Дубровского. Да кто же не среднего роста, у кого не русые волосы, не прямой нос, да не карие *глаза! Бьюсь об заклад, три часа будешь говорить с самим Дубровским, а не догадаешься, с кем бог тебя свел. Нечего сказать, умные головушки приказные!*

Второй отрывок («Выстрел»)

Рассеянные жители столицы не имеют понятия о многих впечатлениях, столь известных жителям деревень или городков, например об ожидании почтового дня: во вторник и пятницу полковая наша канцелярия бывала полна офицерами: кто ждал денег, кто письма, кто газет.

Третий отрывок («Капитанская дочка»)

Вскоре все заговорили о Пугачеве. Толки были различны. Комендант послал урядника с поручением разведать хорошенько обо всем по соседним селениям и крепостям. Урядник возвратился через два дня и объявил, что в степи верст за шестьдесят от крепости видел он множество огней и слышал от башкирцев, что идет неведомая сила.

а) Посчитайте буквы «а», «о» и «и» в трех отрывках и заполните таблицу встречаемости этих букв:

Номер отрывка	Буква «а»	Буква «о»	Буква «и»
1			
2			
3			

Как вы думаете, какая из этих букв чаще используется в русском языке?

б) Посчитайте буквы «н» и «т» и заполните таблицу встречаемости этих букв:

Номер отрывка	Буква «н»	Буква «т»
1		
2		
3		

Можно ли по полученным данным судить, какая из этих букв чаще используется в русском языке?

Для справки приведем таблицу частоты встречаемости в тексте букв русского языка (в среднем на 1000 букв).

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	75	Л	42	Ц	5
Б	17	М	31	Ч	15
В	46	Н	65	Ш	7
Г	16	О	110	Щ	4
Д	30	П	28	Ъ	1
Е	87	Р	48	Ы	19
Ж	9	С	55	Ь	16
З	18	Т	65	Э	3
И	75	У	25	Ю	7
Й	12	Ф	2	Я	22
К	34	Х	11		

Историческая справка. На протяжении нескольких веков, до самого последнего времени, для печати книг, журналов и газет использовались типографские кассы с набором букв. Из них наборщик на специальной доске набирал текст каждой отдельной страницы. Затем набранная страница покрывалась типографской краской, и с нее делалось необходимое количество оттисков. Поскольку одни буквы используются значительно чаще других, количество различных букв в кассе должно быть разным. Таблица встречаемости букв показывает, в каких пропорциях должны были содержаться разные буквы в типографской кассе.

Не менее важна информация о встречаемости букв для лингвистов и шифровальщиков. Известны методы восстановления исходного текста по перехваченному зашифрованному тексту, при которых используется таблица встречаемости букв.

Таблицу встречаемости букв, знаков препинания и другие статистические характеристики текста можно использовать и для выяснения вопроса об авторстве.

Глава II. Диаграммы

Таблицы, как мы видели, удобны для упорядочивания и поиска данных. Однако они не дают наглядного представления о соотношении величин. Для этого служат различные диаграммы: столбиковые, круговые, рассеивания и др. Пословица гласит: «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать».

Диаграммы используются для наглядного, запоминающегося изображения и сопоставления данных.

Диаграммы часто используются в газетах, журналах и книгах для иллюстрации различных данных.

7. Столбиковая диаграмма

В таблице приведены данные о числе шоколадок, проданных в школьной столовой с понедельника по пятницу.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Число шоколадок	8	5	4	2	3

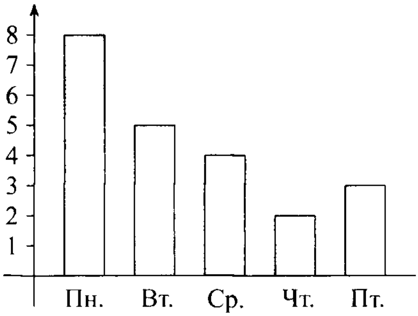
Наглядно эти данные можно изобразить в виде столбиков, каждый из которых показывает число шоколадок, проданных за день.

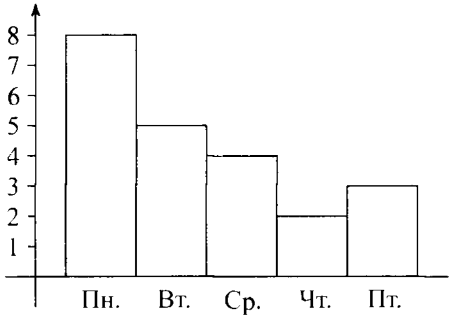
Диаграмма 1. Количество проданных шоколадок

Строя эту диаграмму, мы начертили горизонтальную и вертикальную прямую. На горизонтальной прямой отметили дни недели с понедельника по пятницу. Над каждой отметкой нарисовали стопку проданных шоколадок. На вертикальную прямую нанесли деления, помогающие понять, сколько шоколадок в каждом столбике.

Диаграмму можно упростить, не указывая горизонтальную разбивку столбиков.

Ниже показаны два варианта оформления диаграммы 1.





При изображении столбиковой диаграммы важно, чтобы столбики были одинаковы по ширине. Расстояния между столбиками тоже должны быть одинаковыми.

Мы рассказали о том, что диаграммы используются для наглядного представления о соотношении величин. С помощью диаграмм сравнивать данные удобнее, чем с помощью таблиц.

Вопросы

1. Чем диаграмма удобнее таблицы?
2. В каких случаях таблица удобнее диаграммы?
3. Какие требования предъявляются при построении столбиковой диаграммы?

Упражнения

1. По диаграмме 1 определите:

а) в какой день недели продано больше всего шоколадок;

б) в какой день недели продали меньше всего шоколадок;

в) в какие дни недели продавали примерно одинаковое число шоколадок?

2. По диаграмме 1 определите, во сколько раз больше продано шоколадок в понедельник по сравнению со средой? с четвергом?

3. Можно ли заключить с помощью диаграммы 1, что число продаваемых шоколадок сокращается к концу недели?

4. Персонаж сказки «Чиполлино» кум Тыква с детства мечтал построить свой дом и покупал каждый год несколько кирпичей. В таблице приведены данные о его покупках за шесть лет.

Год	1	2	3	4	5	6
Число кирпичей	1	1	2	4	3	3

Постройте столбиковую диаграмму, показывающую число кирпичей, купленных каждый год.

5. За контрольную работу по математике школьники получили 6 оценок «отлично», 10 оценок «хорошо», 5 оценок «удовлетворительно» и 3 оценки «неудовлетворительно». Постройте столбиковую диаграмму по этим данным.

6. В таблице указаны 6 лучших бомбардиров премьер-лиги чемпионата России по футболу в 2006 г. и место команды по итогам чемпионата.

Игрок	Команда	Число голов	Место
Р. Павлюченко	«Спартак» (Москва)	18	2
Жо (Джоао)	ЦСКА (Москва)	14	1
Домингес	«Рубин» (Казань)	13	5
П. Погребняк	«Томь» (Томск)	13	8
Д. Лоськов	«Локомотив» (Москва)	13	3
Д. Кириченко	ФК «Москва»	12	6

а) Постройте столбиковую диаграмму числа голов, забитых лучшими бомбардирами.

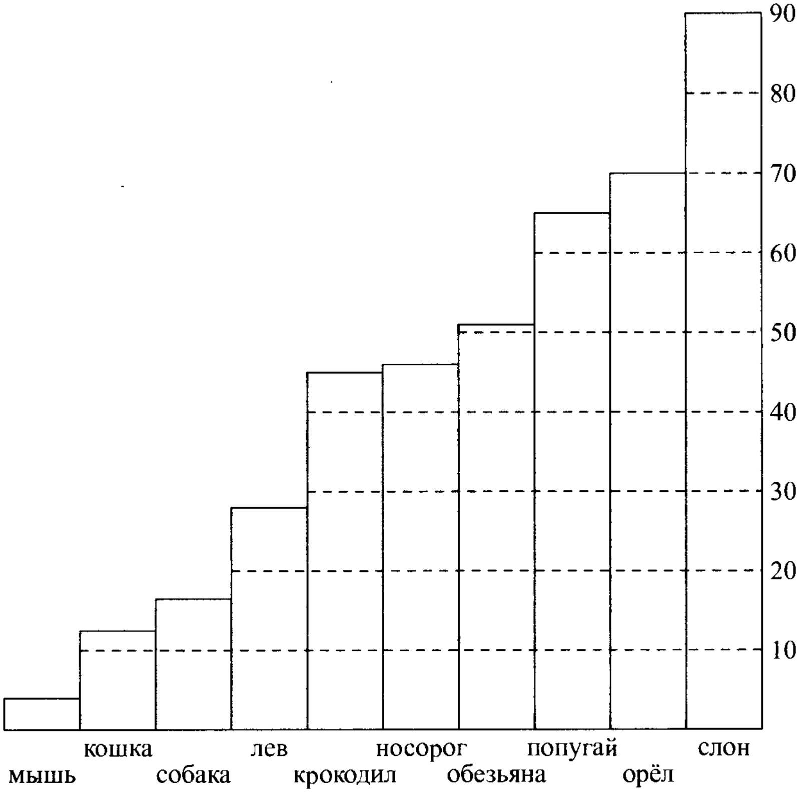
б) Можно ли сказать, что среди бомбардиров есть явный лидер?

в) Как вы думаете, есть ли связь между числом голов, забитых бомбардирами, и местом их команд в чемпионате?

7. Столбиковая диаграмма 2 отражает примерную продолжительность жизни различных животных.

Расстояние между столбиками на этой диаграмме отсутствует. Цена деления вертикальной оси равняется 10 годам. Обратим внимание на то, что эта диаграмма предназначена, прежде всего, для сопоставления примерной продолжительности жизни различных животных и не дает с высокой точностью самих значений продолжительности жизни для каждого из животных. Для удобства

Диаграмма 2. Продолжительность жизни животных



животные на диаграмме упорядочены по возрастанию их примерной продолжительности жизни. Горизонтальная разметка диаграммы помогает сравнивать высоту столбиков.

а) Кто из перечисленных на диаграмме 2 животных живет, по нашим данным, меньше всех?

б) Кто из перечисленных на диаграмме 2 животных живет, по нашим данным, дольше всех?

в) Кто живет дольше, кошка или собака?

г) Какие из животных живут примерно одинаково долго?

д) Во сколько раз лев живет дольше кошки?

е) Во сколько раз обезьяна живет дольше собаки?

ж) Во сколько раз слон живет дольше обезьяны?

з) Можно ли утверждать по данным диаграммы, что чем крупнее животное, тем дольше оно живет?

8. В таблице приведены данные о выработке электроэнергии в России с 1998 г. по 2006 г. в миллиардах киловатт-часов.

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Электроэнергия, млрд. кВт · ч	827	846	878	891	891	915	931	953	991

а) Постройте столбиковую диаграмму по данным таблицы.

б) Сильно ли изменяется выработка электроэнергии за год?

в) В каком году выработка электроэнергии была самой низкой?

г) В каком году выработка электроэнергии была самой высокой?

д) В каком году прирост выработки электроэнергии был самым низким?

е) Какую тенденцию можно заметить в этих данных в начале 2000-х гг.?

9. Соревнования Гран-при «Формулы-1» в 2006 г. состояли из 18 гонок. Очки начисляются гонщикам, занявшим в гонке одно из первых 8 мест. За первое место дается 10 очков, за второе — 8, за третье — 6, за четвертое — 5 и т. д., за восьмое место — 1 очко.

В таблице приведены имена гонщиков «Формулы-1» и сведения о результатах этих гонщиков по итогам всех гонок в Гран-при 2006 г.

Гонщик	Число выигранных этапов	Число очков	Место
Ф. Алонсо	7	134	1
М. Шумахер	7	121	2
Ф. Маса	2	80	3
Д. Физикелла	1	72	4
К. Райкконен	0	65	5
Д. Баттон	1	56	6
Р. Барикелло	0	30	7
Х. П. Монтойя	0	26	8

а) Постройте столбиковую диаграмму числа выигранных этапов.

б) Можно ли считать, что в сезоне 2006 г. среди гонщиков был явный лидер по числу выигранных этапов?

в) Постройте столбиковую диаграмму числа очков, набранных гонщиками.

г) Можно ли считать, что в сезоне 2006 г. среди гонщиков был явный лидер по числу набранных очков?

д) Как вы думаете, есть ли взаимосвязь между числом выигранных этапов и числом очков?

10. В таблице собраны данные о дальности перелетов на зимовку некоторых птиц.

Птица	Расстояние, км
Тонкоклювый буревестник	9000
Европейский белый аист	10 000
Сибирская пеночка-весничка	11 000
Скандинавская пеночка-таловка	13 500
Полярная крачка	17 000

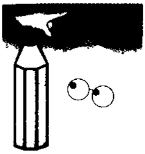
Постройте столбиковую диаграмму этих данных.

11. В таблице приведены данные о дальности беспосадочных перелетов некоторых летающих животных.

Животное	Расстояние, км
Рубиногорлая колибри	800
Летучая мышь	1100
Перелетная саранча	2200
Американская бурокрылая ржанка (западная популяция)	3300
Американская бурокрылая ржанка (восточная популяция)	5500

Постройте столбиковую диаграмму этих данных.

8. Круговая диаграмма



Пример 1. Младшему брату 10 лет, а старшему 14. Братья делят круглый пирог так, чтобы каждому достался кусок, пропорциональный его возрасту. Старший заявил:

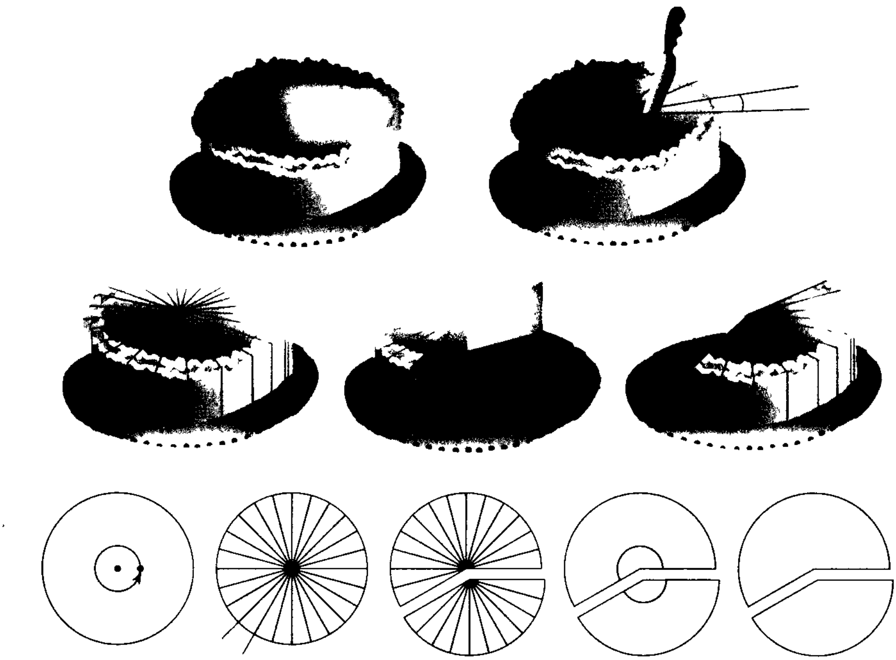
— Нам вместе 24 года. Разделим пирог на 24 равные части. Десять из них твои, а остальные 14 мои.

— Но как же это сделать? — спросил младший.

— Это можно сделать разными способами, но мы используем самый простой. Из центра пирога ножом мы будем вырезать последовательно равные куски. Чтобы их получилось ровно 24, нам нужно вычислить угол, на который мы будем поворачивать нож, отрезая каждый следующий кусок. Этот угол равен

$$360^\circ : 24 = 15^\circ.$$

Пирог разрезали. Младший брат отсчитал 10 кусков, а остальные оставил старшему. Старший брат продолжал:



— Все куски пирога одинаковы. В следующий раз, чтобы не делать лишних разрезов, мы поступим иначе. Вычислим угол, который составляет твою часть пирога: $15° \cdot 10 = 150°$, и вырежем из пирога кусок, соответствующий этому углу.

Такой способ деления круга на части столь прост и убедителен, что его используют для показа долей целого в самых различных случаях. Полученная таким образом схема деления называется ***круговой диаграммой***.

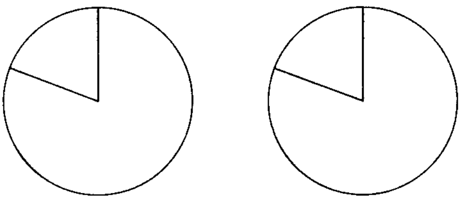
Определение. Диаграмма, показывающая, как целое делится на части в виде секторов круга, углы которых пропорциональны долям единого целого, называется ***круговой диаграммой***.

Чтобы построить круговую диаграмму на бумаге, необходимы линейка, циркуль и транспортир. Чтобы закрасить разные секторы в разные цвета, полезно иметь цветные карандаши.

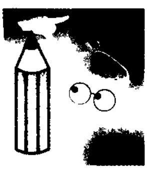
Часто углы приходится строить приблизительно. Например, в 2001 г. численность населения младше 16 лет составляла в России 19,3 %. Чтобы построить соответствующий сектор, нужно найти угол этого сектора:

$$360° : 100 \cdot 19{,}3 = 69{,}48°.$$

Трудно построить такой угол точно. Но в этом нет необходимости. Человеческий глаз не замечает отличия в 1—2 градуса в величине угла. Поэтому при построении круговых диаграмм углы секторов можно округлять. На рисунке показаны две круговые диаграммы. На одной из них сектор имеет угол ровно 69,48°, а на второй угол равен 69°. Попробуйте определить, где какая диаграмма.



Если целое делится на несколько частей, то диаграмма состоит из нескольких секторов. При этом угол каждого из секторов приближенно пропорционален той доле, которую он показывает.



Пример 2. В таблице даны сведения о численности городского и сельского населения России в разные годы.

Постройте круговую диаграмму, показывающую доли городского и сельского населения России в 1959 г.

Решение. Вычислим общую численность населения в 1959 г.: $61{,}6 + 55{,}9 = 117{,}5$ (млн. чел.).

Найдем доли городского и сельского населения. Доля городского населения страны равна

$$61{,}6 : 117{,}5 \approx 0{,}524.$$

8. Круговая диаграмма

Городское и сельское население России

Год	Население, млн. чел.		
	Городское	Сельское	Всего
1959	61,6	55,9	117,5
1970	80,6	49,3	
1979	94,9	42,5	
1989	108,0	39,0	
2002	106,5	38,7	

Доля сельского населения равна

$$55{,}9 : 117{,}5 \approx 0{,}476.$$

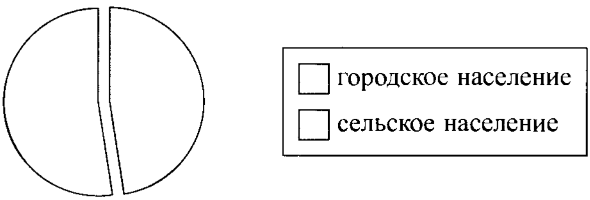
Вычислим угол сектора круговой диаграммы, соответствующий городскому населению:

$$360^\circ \cdot 0{,}524 = 188{,}64^\circ.$$

Вычислим угол сектора, соответствующий сельскому населению:

$$360^\circ - 188{,}64^\circ = 171{,}36^\circ.$$

Построим диаграмму:



Закрасив секторы диаграммы разным цветом, мы дополнительно указали, чему соответствует каждый из этих цветов. Такое указание называют «легендой». Легенда упрощает чтение и понимание диаграммы.

Из полученной диаграммы видно, что в 1959 г. численность городского населения совсем немного превышала численность сельского. Мы можем не помнить конкретных цифр, но соотношение между ними наглядно показывает круговая диаграмма.

В этом пункте рассказано о круговых диаграммах, для чего они используются и как их можно построить с помощью циркуля, линейки и транспортира.

Упражнения

1. Два брата решили разрезать пирог на части, пропорциональные их возрасту. Одному из них было 6 лет, а другому 12. Постройте круговую диаграмму, показывающую, какая часть пирога достанется каждому из братьев.

2. В классе 16 девочек и 20 мальчиков. Постройте круговую диаграмму, показывающую доли девочек и мальчиков от общего числа учеников в классе.

3. Начертите в тетради таблицу «Городское и сельское население России» и заполните ее последний столбец.

4. Вычислите долю сельского населения в процентах в 1989 и 2002 гг. и сравните их между собой.

5. Составьте таблицу долей городского и сельского населения страны в разные годы.

6. Постройте круговые диаграммы соотношения численности городского и сельского населения России:

а) в 1970 г.; б) в 1979 г.; в) в 1979 г.; г) в 1989 г.; д) в 2002 г.

7. Постройте столбиковую диаграмму, показывающую численность городского населения России в разные годы.

8. Постройте столбиковую диаграмму, показывающую долю городского населения России в разные годы. Можно ли утверждать, что доля городского населения в России постепенно возрастает?

9. Постройте столбиковую диаграмму, показывающую численность сельского населения России в разные годы.

10. Постройте столбиковую диаграмму, показывающую долю сельского населения России в разные годы. Можно ли утверждать, что доля сельского населения в России постепенно сокращается?

11. Постройте столбиковую диаграмму, показывающую численность населения России в разные годы.

В таблице 1 представлены сведения о проживании мужчин и женщин в городах и сельской местности (в миллионах человек), полученные в ходе первой переписи населения в Российской империи в 1897 г.

12. По данным таблицы 1 найдите численность:

а) мужского населения России; б) женского населения;
в) городского населения; г) сельского населения;
д) общую численность населения.

13. По данным таблицы 1 постройте круговую диаграмму соотношения численности городского и сельского населения России в 1897 г.

8. Круговая диаграмма

Таблица 1. Городское и сельское население России в 1897 г.

	Население, млн. чел.		
	Городское	Сельское	Всего
Мужчины	8,74	54,48	
Женщины	7,76	55,39	
Всего:			

14. Сравните полученную в задании 13 круговую диаграмму соотношения численности городского и сельского населения в России в 1897 г. с аналогичной диаграммой:

а) для 1959 г.; б) для 2002 г.

Что можно сказать об изменении соотношения численности городского и сельского населения России за последние сто лет?

15. Постройте круговую диаграмму соотношения численности мужчин и женщин:

а) в городах; б) в сельской местности; в) в целом по стране.

Какие выводы о соотношениях численности мужчин и женщин можно сделать в зависимости от места проживания?

Как часто школьники 7—9 классов покупают шоколад?

В таблице приведены данные опроса (в процентах от числа опрошенных) в нескольких городах.

Регулярность покупки	Москва	Казань	Екатеринбург	Красноярск
Реже раза в неделю	15 %	8 %	35 %	28 %
Раз в неделю	32 %	28 %	21 %	19 %
Два раза в неделю	22 %	32 %	23 %	33 %
По-другому	31 %	32 %	21 %	20 %

Построим круговую диаграмму распределения школьников Москвы по регулярности покупки шоколада.

Решение. Вычислим углы секторов, соответствующих каждой из групп школьников:

угол сектора для покупающих шоколад реже раза в неделю: $360° \cdot 0{,}15 = 48°$;

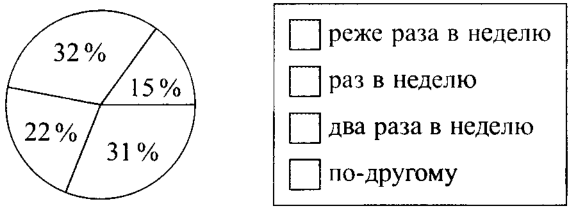
угол сектора для покупающих шоколад раз в неделю: $360° \cdot 0{,}32 = 115{,}2°$;

угол сектора для покупающих шоколад дважды в неделю: $360° \cdot 0{,}22 = 79{,}2°$;

угол сектора для покупающих шоколад другим образом: $360° \cdot 0{,}31 = 111{,}6°$.

Построим секторы диаграммы, соответствующие вычисленным углам. При этом значения углов можно округлять.

Регулярность покупки шоколада школьниками Москвы



16. По таблице потребления шоколада постройте круговую диаграмму для данных из:

а) Казани; б) Екатеринбурга; в) Красноярска.

17. По результатам опроса 30 учеников и учителей в одной из школ (из одной семьи опрашивали только одного человека) составлена таблица проживания домашних животных в семьях опрошенных:

Кошка	Собака	Птицы	Рыбки	Другие	Никого
18	10	5	2	7	6

а) Объясните, почему число животных превышает число опрошенных семей.

б) Постройте круговую диаграмму, показывающую долю семей, в которых отсутствуют какие-либо домашние животные.

в) Предположим, что в каждой семье живет не более двух видов различных животных. Вычислите по данным таблицы число семей, в которых живет ровно один вид животных. Постройте круговую диаграмму, показывающую доли семей: без домашних животных, с одним домашним животным, с двумя домашними животными.

18. В течение первой четверти Ваня получил следующие оценки:

по английскому языку: 4, 5, 5, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 5;

по математике: 4, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 4.

а) Постройте круговые диаграммы распределения оценок по каждому из предметов. Сравните их между собой.

б) Можно ли утверждать, что Ваня примерно одинаково учится по этим предметам?

19. Выпишите из дневника свои оценки по математике и иностранному языку по итогам первой четверти. Постройте круговые диаграммы распределения оценок по каждому из этих предметов. Сравните их между собой.

20. Вспомните, какие из домашних животных живут в 10—15 семьях ваших друзей и близких. Постройте круговую диаграмму, показывающую:

а) долю семей, в которых нет никаких домашних животных;

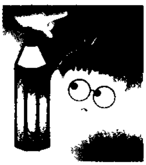
б) долю семей, имеющих кошек, долю семей, имеющих собак, и долю семей, имеющих прочих животных, среди семей, в которых есть домашние животные.

21. Постройте круговую диаграмму, показывающую соотношение девочек и мальчиков в вашем классе.

22. По итогам предыдущей четверти постройте круговую диаграмму, показывающую доли различных оценок за четверть по математике учеников вашего класса.

9. Диаграмма рассеивания

Часто бывает полезно знать, есть ли некоторая связь между изучаемыми величинами. Разобраться в этом помогает ***диаграмма рассеивания***. Покажем, как она строится, на примере.



Пример 1. Есть ли связь между ростом и весом человека? Для наглядного ответа на этот вопрос построим диаграмму рассеивания. Данными для этой диаграммы служит набор пар чисел.

Каждая пара — это рост и вес[1] одного человека. В таблице приведены значения роста и веса 15 юношей.

Рост, см	167	169	179	178	177	175	171	181	174	175	180	174	172	178	171
Вес, кг	62	67	70	72	70	69	63	80	73	66	75	70	67	74	66

Чтобы получить диаграмму рассеивания, нужно в системе координат поставить точки, абсциссы которых — рост, а ординаты — соответствующий вес. На рисунке показана диаграмма рассеивания для этих данных.

Из диаграммы 3 видно, что люди с примерно одинаковым весом могут иметь разный рост, а с почти одинаковым ростом — разный вес, т. е. между этими величинами нет жесткой связи. Однако в целом вес человека тем больше, чем больше его рост.

[1] Вы хорошо знаете, что в килограммах измеряется масса. Но на практике очень часто массу отождествляют с весом.

Диаграмма 3

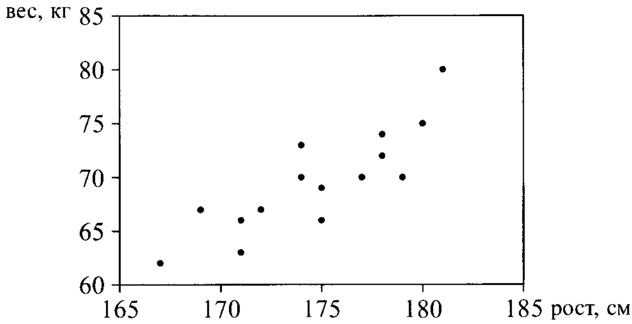


Диаграмма рассеивания показывает примерный характер взаимосвязи между двумя числовыми характеристиками.

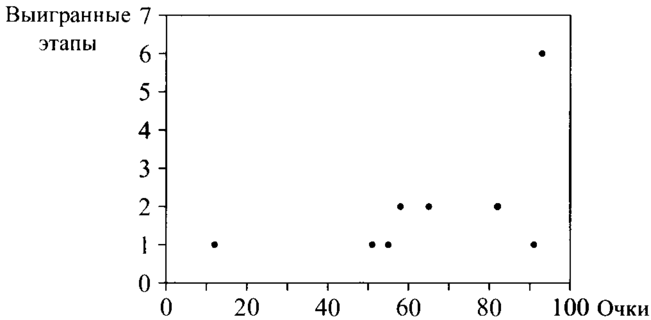
Пример 2. Есть ли взаимосвязь между числом выигранных этапов в Гран-при «Формулы-1» и количеством очков, набранных гонщиком по итогам всех этапов? Результаты сезона 2003 г. приведены в таблице.

Гонщик	Число выигранных этапов	Число очков	Место
М. Шумахер	6	93	1
К. Райкконен	1	91	2
Х. П. Монтойя	2	82	3
Р. Баррикелло	2	65	3
Р. Шумахер	2	58	5
Ф. Алонсо	1	55	6
Д. Култхарт	1	51	7
Д. Физикелла	1	12	12

9. Диаграмма рассеивания

Диаграмма рассеивания для этих данных имеет вид:

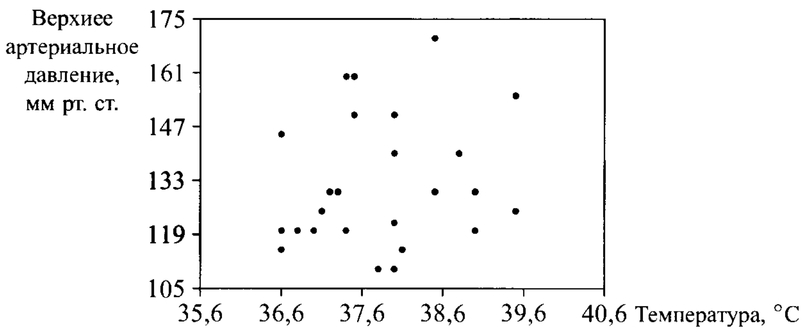
Диаграмма 4



На диаграмме 4 видно, что гонщики, выигравшие всего один этап, могут набрать много очков, хорошо выступив в других этапах. Например, К. Райкконен набрал 91 очко, потому что часто занимал второе место. Гонщики, выигравшие по два этапа, в среднем набрали больше очков (около 68), чем гонщики, выигравшие только один этап (около 52 очков). Наверное, есть некоторая взаимосвязь между числом набранных очков и числом выигранных этапов. Но судить о ней определенно по результатам одного года трудно — она не столь явная, как связь между ростом и весом.

Пример 3. Самочувствие человека во многом определяется температурой тела и артериальным давлением. По данным обследования в больнице 25 человек построена диаграмма рассеивания для температуры и давления.

Диаграмма 5



На диаграмме 5 не видно никакой связи между давлением и температурой. При гриппе или ангине может быть высокая температура и нормальное давление. А у людей с повышенным давлением (гипертоников) или пониженным давлением (гипотоников) температура тела может быть совершенно нормальной.

Мы узнали о том, что для выявления связи между величинами применяются диаграммы рассеивания, и о том, как их строить.

Вопросы

1. Зачем используются диаграммы?
2. Какие виды диаграмм вы знаете?
3. Что такое диаграмма рассеивания?
4. Зачем используются диаграммы рассеивания?

Упражнения

1. Для следующего набора пар значений постройте диаграмму рассеивания: (1; 2), (2; 2), (3; 2), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (4; 3), (4; 4), (6; 6). Можно ли говорить о том, что с ростом первого значения пары в целом возрастает и второе значение?

2. Для следующего набора пар значений постройте диаграмму рассеивания: (1; 2), (2; 3), (3; 3), (3; 4), (3; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (6; 3). Можно ли говорить о том, что с ростом первого значения пары в целом возрастает и второе значение?

3. В таблице приведены данные о весе и росте 12 девушек.

Рост, см	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Вес, кг	53	67	45	53	60	62	58	60	62	55	55	49

Постройте диаграмму рассеивания. Есть ли взаимосвязь между ростом и весом девушек?

4. Фигуристы получает две оценки: за технику и за артистизм. В таблице приведены оценки одного судьи за выступления различных фигуристов на одном соревновании.

Техника	4,3	4,5	4,5	4,8	4,9	5,2	5,4	5,0	5,5	5,8	5,7
Артистизм	4,5	4,2	4,6	4,5	5,1	5,2	5,6	5,1	5,6	5,9	5,8

Постройте диаграмму рассеивания этих оценок. Есть ли какая-то взаимосвязь между оценками за технику и оценками за артистизм?

9. Диаграмма рассеивания

5. В таблице приведены данные о числе голов, забитых лучшими бомбардирами премьер-лиги чемпионата России по футболу в 2006 г., и место их команды в чемпионате.

Игрок	Команда	Число голов	Место
Р. Павлюченко	«Спартак» (Москва)	18	2
Жо (Джоао)	ЦСКА (Москва)	14	1
Домингес	«Рубин» (Казань)	13	5
П. Погребняк	«Томь» (Томск)	13	8
Д. Лоськов	«Локомотив» (Москва)	13	3
Д. Кириченко	ФК «Москва»	12	6

Постройте диаграмму рассеивания. Можно ли утверждать, что чем больше голов забивают лучшие бомбардиры, тем лучше место их команды в чемпионате?

6. Мальчики на соревнованиях прыгали в длину с места и бежали 60 м. Их результаты приведены в таблице.

Прыжок, см	180	194	190	215	210	170	175	202	205	195	205	200	190	186
Бег, с	10,8	10,2	10,6	9,6	10,2	11,0	11,6	10,4	10,0	11,0	9,8	10,6	10,8	10,7

Постройте диаграмму рассеивания. Можно ли утверждать, что результаты прыжков с места связаны со скоростью бега на 60 м?

Глава III. Описательная статистика

10. Среднее значение

Рассмотрим данные о производстве пшеницы в России в 1995—2001 гг. (в миллионах тонн). Они приведены в таблице 1.

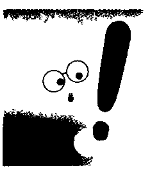
Таблица 1. Производство пшеницы в России в 1995—2001 гг.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Производство, млн. тонн	30,1	34,9	44,3	27,0	31,0	34,5	47,0

Как видно из таблицы 1, производство пшеницы в разные годы различается. Оно зависит от погодных условий, площади посева и других обстоятельств. Поэтому производство пшеницы за один год не дает полного представления об уровне производства пшеницы в стране. Для этой цели лучше использовать среднее значение за ряд лет. По данным таблицы мы можем вычислить среднее производство пшеницы за 7 лет. Для этого надо сложить годовые сборы пшеницы и затем сумму разделить на число слагаемых. В данном случае получаем

$$(30{,}1+34{,}9+44{,}3+27{,}0+31{,}0+34{,}5+47{,}0):7 \approx 35{,}5.$$

Получаем, что среднее производство пшеницы в России за рассматриваемый период 1995—2001 гг. составляло приблизительно 35,5 млн. тонн в год. Вычисленное нами значение называется ***средним арифметическим*** или просто ***средним***.



Определение. *Средним арифметическим* нескольких чисел называется число, равное отношению суммы этих чисел к их количеству.

Другими словами, среднее арифметическое — это дробь, в числителе которой стоит сумма чисел, а в знаменателе — их количество.

К вычислениям средних значений прибегают во многих подобных задачах.

Если мы нанесем данные о производстве пшеницы из таблицы 1 на числовую ось в виде точек, а среднее значение в виде вертикальной черты, то получим рисунок 1.

10. Среднее значение

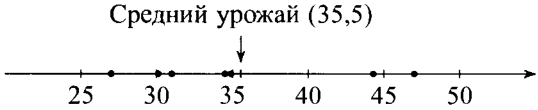


Рис. 1. Производство пшеницы в России и среднее значение (млн. тонн)

Видно, что пять чисел оказались меньше среднего значения, а два больше. При этом два числа 34,9 и 34,5 довольно близки к среднему. Среднее арифметическое нескольких чисел показывает, в каком месте числовой прямой группируются эти числа. Оно является в некотором смысле «центром» рассматриваемого набора чисел. Поясним, что здесь означает слово «центр». Представим, что числовая ось является стержнем, на который подвешены гири одинаковой массы в точках, соответствующих данным числам, как это показано на рисунке 2.

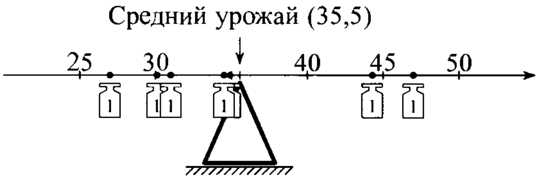
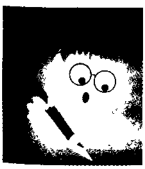


Рис. 2. Среднее арифметическое — точка равновесия

На стержне существует такая точка, на которую можно «положить» весь стержень с гирями так, что гири останутся в равновесии. Этой точкой на стержне будет среднее арифметическое. В физике эту точку называют «центром масс».

Этот пункт рассказал о том, что среднее арифметическое числового набора характеризует в целом положение этого набора на числовой прямой.



Упражнения

1. Каким было производство пшеницы в 1996 г., в 2000 г.?
2. В каком году производство пшеницы было:
а) наибольшим; б) наименьшим?
3. Совпадает ли производство пшеницы в среднем за 7 лет со значением в каком-нибудь году?

4. В каком году производство пшеницы было ближе всего к среднему показателю?

5. Вычислите среднее арифметическое данных чисел: а) 8 и 10; б) 8, 9 и 10.

6. Вычислите среднее арифметическое чисел: а) 3, 9 и 27; б) 6, 10, 16 и 20. Сколько из данных чисел меньше среднего значения? Сколько — больше?

7. Все числа равны между собой. Чему равно их среднее арифметическое?

8. Придумайте три числа, среднее арифметическое которых совпадает со вторым по величине из этих чисел.

9. Придумайте четыре таких числа, что их среднее арифметическое равно:
а) второму по величине числу; б) третьему по величине числу;
в) полусумме второго и третьего по величине из этих чисел.

10. Придумайте пять таких чисел, что их среднее арифметическое:
а) больше четырех из них; б) меньше четырех из них.

11. Вычислите среднее арифметическое чисел:
а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 2, 3, 4, 100; г) 1, 2, 3, 4, 1000.

12. Отметьте числа на числовой прямой. Вычислите среднее арифметическое этих чисел и тоже отметьте его на числовой прямой:
а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) 3, 4, 5, 6, 7; г) 10, 11, 12, 13, 14.
Какую закономерность в поведении среднего значения можно заметить в каждом из случаев?

13. Можете ли вы без вычисления указать среднее значение набора чисел? Проверьте свои предположения вычислениями:
а) 13, 14, 15, 16, 17; б) 16, 17, 18, 19, 20; в) 21, 22, 23, 24, 25;
г) 20, 25, 30, 35, 40; д) 22, 24, 26, 28, 30; е) 102, 104, 106, 108, 110.

14. Отметьте числа и их среднее арифметическое на числовой прямой:
а) 1, 2, 3, 4; б) 2, 3, 4, 5; в) 3, 4, 5, 6; г) 10, 11, 12, 13
Какую закономерность в поведении среднего значения можно заметить в каждом из случаев?

15. Вычислите средние арифметические наборов чисел:
а) 2, 4, 7, 8, 9; б) 20, 40, 70, 80, 90; в) 200, 400, 700, 800, 900.
Числа в пунктах б) и в) получены из чисел в пункте а) умножением на 10 и на 100. Какую закономерность можно наблюдать в поведении средних значений в пунктах б) и в) по сравнению со средним в пункте а)?

16. Вычислите средние арифметические наборов чисел:
а) 2, 4, 7, 8, 9; б) 10, 20, 35, 40, 45; в) 50, 100, 175, 200, 225.
Числа в пунктах б) и в) получены из чисел в пункте а) умножением на 5 и на 25. Какую закономерность можно наблюдать в поведении средних значений в пунктах б) и в) по сравнению со средним в пункте а)?

10. Среднее значение

17. В таблице 2 приведена урожайность зерновых культур в России в 1992–2001 гг.

Таблица 2. Урожайность зерновых культур в России в 1992–2001 гг.

Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Урожайность, ц/га	18,0	17,1	15,3	13,1	14,9	17,8	12,9	14,4	15,6	19,4

а) Пользуясь таблицей 2, вычислите среднюю урожайность зерновых культур в России за пять лет с 1992 по 1996 г.

б) Вычислите среднюю урожайность зерновых культур в России за пять лет с 1997 по 2001 г.

в) Сравните среднюю урожайность за первые пять лет (1992–1996 гг.) и за следующие пять лет (1997–2001 гг.). Сильно ли различаются между собой эти средние значения по сравнению с изменчивостью урожайности за 10 лет?

18. В таблице 3 приведено число жителей шести крупнейших городов Московской области в разные годы в тысячах человек. Города указаны в алфавитном порядке.

Таблица 3. Население шести крупнейших городов Московской области в разные годы, тыс. чел.

Город	1959	1970	1979	2002	2006
Балашиха	58	92	117	148	183
Коломна	118	136	147	150	148
Люберцы	95	139	154	157	159
Мытищи	99	119	141	159	162
Подольск	129	169	202	182	180
Химки	47	85	119	141	180

Найдите среднее число жителей крупнейших городов Московской области
а) в 1959 г. б) в 1970 г. в) в 2002 г. г) в 2006 г.

д) Сравните число жителей в данных городах в 1959 г. и в 1970 г. Верно ли, что число жителей возросло за эти годы?

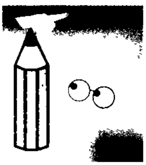
е) Сравните число жителей в данных городах в 2002 г. и в 2006 г. Можно ли заключить, что число жителей возросло за эти годы? Сравните среднее число жителей этих городов в 2002 и 2006 гг.

19. Придумайте пять чисел, среднее арифметическое которых равно:
а) третьему по величине из них; б) четвертому по величине из них;
в) второму по величине из них.

20. Решите упражнения 2—4 для периода 2000—2006 гг. по данным таблицы 2 с. 8.

11. Медиана

Не только среднее арифметическое показывает, где на числовой прямой располагаются числа какого-либо набора и где их центр. Другим показателем является ***медиана***. Медианой набора чисел называют такое число, которое разделяет набор на две равные по численности части. (Вместо «медиана» можно было бы сказать «середина».) Сначала мы на примерах поясним, как найти медиану, а затем дадим строгое определение.

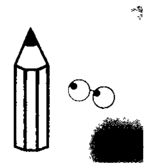


Пример 1. Возьмем какой-нибудь набор различных чисел, например 1, 4, 7, 9, 11. Подберем число m так, чтобы в наборе оказалось поровну чисел, которые меньше и которые больше чем m.

На пробу возьмем $m = 5$. В нашем наборе два числа меньше чем 5 (это 1 и 4), и три числа больше чем 5: это 7, 9 и 11. Значит, число 5 не годится.

Теперь возьмем $m = 7$. Меньше числа 7 два числа, больше числа 7 тоже два числа. Следовательно, число 7 делит этот набор на две равные по численности части: (1 и 4) и (9 и 11), само оставаясь посредине набора. Число 7 — медиана набора чисел 1, 4, 7, 9, 11.

В этом примере набор состоял из 5 чисел, записанных в порядке возрастания. Медианой в этом случае оказывается число, стоящее в точности посередине.



Пример 2. Рассмотрим набор 1, 3, 6, 11. Числа тоже записаны по возрастанию, но их четыре, поэтому среди них нет числа, стоящего точно посередине. Любое число из интервала $(3,6)$ разделяет наш набор на две равные по численности части (1 и 3) и (6 и 11). Медианой этого набора служит любое число, которое больше 3 и меньше 6. По определению в качестве медианы в таких случаях берут центр срединного интервала. В нашем случае это центр интервала $(3,6)$. Это полусумма его концов

$$\frac{3+6}{2} = 4{,}5.$$

Медианой этого набора считают число 4,5.

11. Медиана

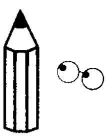
Что такое медиана станет понятнее, если представить, что числа написаны на карточках – каждое на своей. Не будем при этом предполагать, что все числа в наборе различны. Среди них могут быть повторяющиеся. Выложим карточки с числами в ряд так, чтобы числа, написанные на карточках, слева направо **не убывали.** Разделим полученный ряд **карточек** так, чтобы слева и справа от разделяющей границы количества **карточек** были одинаковы.

Если количество карточек нечетное, то разделение пройдет в точности по одной из карточек. Написанное на ней число называется медианой нашего набора чисел.

Если количество чисел в наборе четное, то разделение пройдет между двумя средними карточками. Если числа, написанные на этих карточках, одинаковы, то медианой набора будет это число. Если числа, написанные на средних карточках, различны, то медианой может служить любое промежуточное число. Обычно в качестве медианы берут полусумму чисел, написанных на средних карточках. В этом случае медиана в исходный набор чисел не входит.

Описанный процесс можно наглядно представить следующим образом. Будем одновременно убирать из набора карточки с самым большим и самым маленьким числом до тех пор, пока не останется одна или две карточки. Если осталось одна карточка, то написанное на ней число и будет медианой. Если осталось две карточки, то надо взять полусумму написанных на них чисел.

Замечание. Обычно для краткости говорят о самих числах («уберем самое большое и самое маленькое числа»), хотя, разумеется, это некоторая вольность речи, так как если в наборе было, например, два числа 2, а меньших чисел не было, то фраза «уберем самое маленькое число» означает, что мы убираем лишь одну двойку.



Пример 3. Проведем описанную выше процедуру для набора чисел 12, 2, 11, 3, 7, 10, 3. Расположим числа по возрастанию:

$$2,\ 3,\ 3,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12.$$

Будем убирать одновременно карточки с самым большим и самым маленьким числом. Получим последовательно наборы

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 3 & 7 & 10 & 11 & 12 \\ & 3 & 3 & 7 & 10 & 11 & \\ & & 3 & 7 & 10 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}$$

Медианой будет число 7.

Проведем описанную выше процедуру для набора чисел 12, 2, 11, 3, 7, 10, 3, 15.

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 3 & 7 & 10 & 11 & 12 & 15 \\ & 3 & 3 & 7 & 10 & 11 & 12 & \\ & & 3 & 7 & 10 & 11 & & \\ & & & 7 & 10 & & & \end{array}$$

Медианой может служить любое число, большее либо равное 7 и меньшее либо равное 10. Обычно в качестве медианы данного набора берут число 8,5. Отметим, что в описанном примере медиана в набор не входит!

Проведем описанную выше процедуру для набора чисел 1, 2, 2, 2, 3, 3.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & 2 & 2 & 2 & 3 & \\ & & 2 & 2 & & \end{array}$$

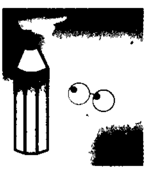
Медианой будет число 2. Отметим, что чисел, больших либо равных 2, в наборе пять, а меньших либо равных 2 — четыре.

Определение 1. *Медианой набора различных чисел* называют такое число (скажем m), которое обладает следующим свойством: количество чисел набора, меньших либо равных m, равно количеству чисел набора, больших либо равных m.

Определение 2. *Медианой* набора n чисел (среди которых могут быть совпадающие), называется

- число, стоящее посередине (на месте с номером $[n/2]+1$) в упорядоченном по возрастанию ряду этих чисел, если n нечетно,
- полусумма чисел, стоящих на средних местах (с номерами $n/2$ и $n/2+1$) в упорядоченном наборе этих чисел, если n четно.

Можно показать, что для набора различных чисел определение 2 дает тот же результат, что и определение 1.



Пример 4. Вернемся к таблице 1 производства пшеницы в России.

Производство пшеницы в России в 1995–2001 гг., млн. тонн

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Производство	30,1	34,9	44,3	27,0	31,0	34,5	47,0

11. Медиана

Средний урожай мы уже находили. Он равен 35,5 млн. тонн в год. Вычислим медиану. Упорядочим числа:

27,0; 30,1; 31,0; 34,5; 34,9; 44,3; 47,0.

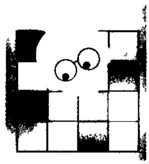
Медиана равна 34,5 млн. тонн (урожай 2000 г.).

В последнем примере медиана совсем немного отличается от среднего арифметического. Так бывает часто, но не всегда. Если числа резко различаются, то медиана и среднее арифметическое могут отличаться значительно. Например, для набора чисел 1, 2, 102 медиана равна 2, а среднее арифметическое равно 35.

Если в наборе чисел есть резко выделяющиеся значения, то медиана лучше, чем среднее арифметическое, показывает, как этот набор расположен на числовой прямой. Рассмотрим пример.

Пример 5. В России в 2002 г. было 13 городов с числом жителей более 1 млн. человек. Данные о населении этих городов в тысячах человек за разные годы приведены в таблице 4.

Таблица 4. Города России с числом жителей более 1 млн. человек по данным переписи 2002 г.



Город	Население, тыс. чел.			
	1979	1989	2002	2006
Волгоград	926	999	1013	1025
Екатеринбург	1210	1296	1293	1308
Казань	989	1085	1105	1113
Москва	8057	8878	10 358	10 425
Нижний Новгород	1342	1400	1311	1284
Новосибирск	1309	1420	1426	1397
Омск	1016	1149	1134	1139
Пермь	989	1041	1000	993
Ростов-на-Дону	925	1008	1070	1055
Самара	1192	1222	1158	1143
Санкт-Петербург	4569	4989	4669	4581
Уфа	977	1080	1042	1030
Челябинск	1030	1107	1078	1093

Найдем среднее значение численности жителей этих городов в 2002 г. Для этого нужно сложить числа последнего столбца и сумму разделить на 13:

$$(1013+1293+1105+10\,358+1311+1426+1134+1000+1070+ \\ +1158+4669+1042+1078):13 \approx 2127{,}5.$$

Обратите внимание: в таблице нет города, население которого было бы близко к этой величине. Почти во всех городах в 2002 г. население немного превышало 1 млн. человек. Исключение составляют Москва и Санкт-Петербург. Из-за этих двух городов среднее арифметическое не дает представления о населении «среднего», «типичного» крупного города.

Лучшее представление о населении «среднего», «типичного» города-миллионера дает медиана. Упорядочим числа за 2002 год и найдем медиану:

1000; 1013; 1042; 1070; 1078; 1105; 1134;
1158; 1293; 1311; 1426; 4669; 10 358.

Медиана равна 1134 тыс. человек. Это население г. Омска. В шести городах из тринадцати: Москве, Санкт-Петербурге, Новосибирске, Нижнем Новгороде, Екатеринбурге и Самаре число жителей превышает население Омска, а в остальных шести городах оно меньше.

Мы познакомились еще с одним показателем, позволяющим судить о том, где располагается набор чисел, — с медианой набора. Иногда медиана точнее характеризует набор в целом, чем среднее арифметическое.

Упражнения

1. Вычислите медиану и среднее арифметическое чисел:
а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 1, 3, 5, 7, 14;
в) 1, 3, 5, 7, 9, 11; г) 1, 3, 5, 7, 9, 16.
Сравните медиану и среднее значение.

2. Пользуясь таблицей 4, укажите:
а) самый большой город России по числу жителей в 2002 г.;
б) второй по населению город в России в 2002 г.;
в) третий и четвертый по числу жителей города в России в 2002 г.

3. Отметьте числа и их медианы на числовой оси:
а) 8, 11, 3; б) 7, 4, 8, 1, 5; в) 10, 3, 9, 8, 4, 5, 7.

4. Отметьте числа и их медианы на числовой оси:
а) 9, 11, 3, 17; б) 7, 4, 8, 1, 5, 6; в) 11, 3, 9, 8, 13, 4, 5, 7.

5. Найдите медиану следующих наборов чисел:
а) 3, 4, 11, 17, 21; б) 17, 18, 19, 25, 28; в) 25, 25, 27, 28, 29, 40, 50.

6. Найдите медиану следующих наборов чисел:

а) 2, 4, 8, 9; б) 1, 3, 5, 7, 8, 9; в) 10, 11, 11, 12, 14, 17, 18, 22.

7. Пользуясь таблицей 4, ответьте на вопросы.

а) Насколько изменилось среднее число жителей крупнейших городов России в 2006 г. по сравнению с 2002 г.? Можно ли считать, что их население в среднем возросло за этот период?

б) Насколько изменилось среднее число жителей крупнейших городов России в 2006 г. по сравнению с 1989 г.? Можно ли считать, что их население в среднем возросло за этот период?

в) Найдите медиану числа жителей городов в 1989 г. Сравните ее с медианой, вычисленной для 2002 г. (1134 тыс. человек).

8. Рассмотрите данные о числе жителей крупнейших городов России (таблица 4), исключив из них Москву и Санкт-Петербург, как города, имеющие федеральный статус.

а) Вычислите среднее значение числа жителей для этих городов в 2006 г.

б) Вычислите медиану числа жителей для этих городов в 2006 г.

в) Сильно ли отличаются медиана и среднее значение для этих городов?

9. Рассмотрите данные о числе жителей крупнейших городов России в 1989 г. (таблица 4), исключив из них Москву и Санкт-Петербург.

а) Найдите среднее число жителей.

б) Найдите медиану числа жителей.

в) Сравните среднее значение и медиану числа жителей в 1989 г. с этими же характеристиками в 2006 г.

10. Выпишите из таблицы 4 города, число жителей которых превышало 1 млн. человек в 1979 г. Найдите медиану числа жителей этих городов:

а) в 1979 г.; б) в 1989 г.; в) в 2002 г.; г) в 2006 г.

11. В таблице 5 представлена урожайность зерновых культур в России.

Таблица 5. Урожайность зерновых культур в России в 1992—2001 гг.

Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Урожайность, ц/га	18,0	17,1	15,3	13,1	14,9	17,8	12,9	14,4	15,6	19,4

По данным таблицы 5 вычислите медиану урожайности и среднюю урожайность зерновых культур в России за период:

а) 1992—2001 гг; б) 1992—1996 гг; в) 1997—2001 гг.

Сравните медиану и среднее. Насколько они отличаются друг от друга?

12. Наибольшее и наименьшее значение. Размах

Иногда интересны не только средние значения или медианы, но и другие величины, связанные с наборами различных чисел.

Если мы хотим узнать, кто победил в прыжках в длину в соревнованиях класса, то выберем того, кто прыгнул дальше всех, т. е. выберем наибольший результат.

В соревнованиях по бегу победителем считается тот, кто пробежал быстрее всех, т. е. показал наименьшее время. ***Наибольшие*** и ***наименьшие значения*** часто интересуют нас в самых разных областях. Нам всегда интересно, какова наименьшая цена на некоторый товар. Увидев новый автомобиль, мы интересуемся, какую наибольшую скорость он может развить. Иногда стремление к рекордам возникает у человека в самых неожиданных случаях. Существует Книга рекордов Гиннеса, в которой написано, сколько часов человек может простоять на одной ноге, кто выпустил больше всего мыльных пузырей, у кого самый длинный нос и т. п.

Пример 1. Петя и Вася поспорили, кто лучше прыгает в длину с места. Чтобы избежать случайности, они решили, что будут прыгать по очереди 5 раз. Результаты своих прыжков в сантиметрах они записали в таблицу.

Результаты прыжков в длину с места, см

Номер прыжка	Петя	Вася
1	190	185
2	205	200
3	195	215
4	210	190
5	200	190

1. Как вы думаете, почему результаты в разных попытках у ребят отличались?

2. Какие из перечисленных ниже причин могут повлиять на результаты прыжка:

а) удача; б) техника прыжка; в) рост; г) вес; д) хорошая тренированность; е) плохое настроение; ж) плотный обед; з) усталость; и) попутный ветер; к) неподходящая обувь; л) координация движений?

3. Кто из ребят прыгает дальше?

4. Найдите по таблице лучший и худший результат каждого из мальчиков и разность между этими результатами.

5. Можно ли утверждать, что Петя прыгает стабильнее?

6. Найдите медиану результатов прыжков каждого из мальчиков.

Хотя Вася показал лучший результат в этом соревновании, Петя, внимательно посмотрев на таблицу, начал спорить:

— А в среднем лучше прыгаю я! И результаты у меня стабильнее! Тебе просто повезло!

— Нет, — возразил Вася. — Я сначала не размялся, а потом вложил в прыжок все свои силы и немного потянул ногу. Поэтому мои последние прыжки были не столь удачны.

На это Пете возразить было нечего.

Во многих спортивных дисциплинах считается, что на отдельный результат может повлиять множество различных причин, особенно когда спортсмен рискует. В таких случаях результаты разных попыток нельзя считать равноценными. Кроме того, средний показатель сильно снижается из-за неудачных попыток.

Поэтому в спорте неразумно использовать средние показатели для оценки результата; нужно учитывать только лучший показатель.

Часто бывает важно знать не только «среднее», «типичное» значение в наборе чисел, но и иметь представление о том, насколько числа в наборе отличаются друг от друга или от «среднего», «типичного значения».

Самой простой такой характеристикой является *размах*.

Определение. Разность между наибольшим и наименьшим числом называется *размахом* набора чисел.

Размах дает нам представление о разбросе данных.

В уже знакомой нам таблице 6 содержатся данные о производстве пшеницы.

Самый большой урожай пшеницы в эти годы был получен в 2001 г. Он составил 47,0 млн. тонн. Самый маленький урожай 27,0 млн. тонн был собран в 1998 г. Размах производства пшеницы в эти годы составил 20 млн. тонн. Это довольно большая величина по сравнению со средним значением производства в эти годы 35,5 млн. тонн. На производство

Таблица 6. Производство пшеницы в России в 1995—2001 гг.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Производство, млн. тонн	30,1	34,9	44,3	27,0	31,0	34,5	47,0

пшеницы в России сильно влияют погодные условия, и поэтому разброс этой величины может быть довольно большим.

Мы узнали, что размах показывает, насколько велико рассеивание значений в числовом наборе.

Упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение, размах, среднее значение и медиану набора чисел:

а) 12, 7, 25, 3, 19, 15; б) 17, 19, 5, 41, 47, 13, 19.

2. В таблице 7 приведены данные о производстве зерновых в России в 2000–2006 гг.

Таблица 7. Производство зерна в России

Показатель	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Производство зерновых, млн. т	65,5	85,2	86,6	67,2	78,1	78,2	78,6
Урожайность зерновых, ц/га	15,6	19,4	19,6	17,8	18,8	18,5	18,9
Производство пшеницы, млн. т	34,5	47,0	50,6	34,1	45,4	47,7	45,0

По таблице 7 найдите наибольшее, наименьшее значение и размах:

а) производства зерновых в 2000–2006 гг.;

б) производства пшеницы в 2000–2006 гг.;

в) урожайности зерновых в 2000–2006 гг.

13. Отклонения

Попробуем узнать, как числа некоторого набора расположены по отношению к своему среднему арифметическому. Зная только размах, разность между наибольшим и наименьшим значением, мы не можем судить о том, как расположены числа в имеющемся наборе. Для примера возьмем набор 1, 6, 7, 9, 12. Вычислим среднее арифметическое: $(1+6+7+9+12):5=7$. Найдем отклонение каждого числа от среднего:

$$1-7=-6, \quad 6-7=-1, \quad 7-7=0, \quad 9-7=2, \quad 12-7=5.$$

Получился новый набор, который состоит из отклонений. Если число меньше среднего, то его отклонение отрицательно, если число больше среднего, то его отклонение положительно. В одном случае — для числа 7, которое совпало со средним арифметическим, — отклонение равно нулю. По набору отклонений можно судить о том, насколько разнообразны числа в наборе. Если отклонения малы, то числа в наборе расположены близко к среднему арифметическому. А если среди отклонений есть большие по модулю, то числа в наборе сильно разбросаны.

Для любого набора, если только не все числа в нем равны, часть отклонений будет положительна, а часть — отрицательна. При этом сумма всех отклонений равна 0. Убедимся в этом на нашем примере:

$$-6-1+0+2+5=0.$$

В этом состоит основное свойство отклонений: **сумма отклонений чисел от среднего арифметического этих чисел равна нулю.**

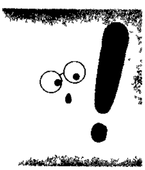
В этом пункте рассказывалось об отклонениях величины от ее среднего значения. Кроме того, мы узнали, что сумма всех отклонений в наборе от среднего равна нулю.

14. Дисперсия

Наиболее полной характеристикой разброса набора чисел является набор их отклонений от среднего арифметического. Но когда набор чисел велик, рассматривать набор отклонений практически неудобно. Нужно описать разнообразие чисел в наборе одной характеристикой, одним числом.

Размах — слишком грубая мера разброса чисел в наборе, поскольку учитывает только два из них — наименьшее и наибольшее. Можно попробовать взять «среднее отклонение». Но сумма отклонений всегда равна нулю, поэтому среднее арифметическое отклонений тоже равно нулю и его нельзя использовать как меру разброса.

Чтобы судить о разбросе, принято складывать не сами отклонения, а их квадраты. Квадраты отклонений неотрицательны, поэтому сумма квадратов отклонений зависит только от абсолютных величин отклонений, а не от их знаков. Чем больше отклонения чисел от среднего арифметического, тем больше будет сумма квадратов отклонений. Для того чтобы мера разброса чисел не зависела от их количества в наборе, в качестве такой меры берут среднее арифметическое квадратов отклонений. Эту величину называют ***дисперсией***.



Определение. Среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения называется в статистике ***дисперсией*** набора чисел.

Пример 1. Снова обратимся к таблице производства пшеницы в России. Мы нашли, что среднее производство пшеницы за период 1995—2001 гг. составило 35,5 млн. тонн в год. Вычислим дисперсию. Составим таблицу, разместив данные по производству не в строке, а в столбце. Вычислим отклонения от среднего и их квадраты. Полученные числа занесем в два новых столбца.

Таблица 8. Производство пшеницы в России в 1995—2001 гг., млн. тонн

Год	Производство	Отклонение от среднего	Квадрат отклонения
1995	30,1	−5,4	29,16
1996	34,9	−0,6	0,36
1997	44,3	8,8	77,44
1998	27,0	−8,5	72,25
1999	31,0	−4,5	20,25
2000	34,5	−1,0	1,00
2001	47,0	11,5	132,25

Для расчета дисперсии следует сложить все значения в столбце «Квадрат отклонения» и разделить на количество слагаемых:

$$(29{,}16+0{,}36+77{,}44+72{,}25+20{,}25+1{,}00+132{,}25):7=47{,}53.$$

Пример 2. Покажем на простом примере, как дисперсия характеризует разброс наблюдений. Возьмем два набора чисел 1, 2, 3 и 0, 2, 4. Среднее арифметическое значение обоих наборов равно 2. Для обоих наборов вычислим отклонения и квадраты отклонений и все данные занесем в таблицу 9.

Таблица 9

1-й набор	Отклонение от среднего	Квадрат отклонения	2-й набор	Отклонение от среднего	Квадрат отклонения
1	−1	1	0	−2	4
2	0	0	2	0	0
3	1	1	4	2	4

Дисперсия первого набора: $(1+0+1):3=\frac{2}{3}$.

Дисперсия второго набора: $(4+0+4):3=2\frac{2}{3}$.

14. Дисперсия

Числа в первом наборе расположены более кучно — ближе друг к другу и к своему среднему, — чем числа во втором наборе. Поэтому дисперсия первого набора получилась меньше, чем второго.

Пример 3. Континентальный климат отличается от умеренного более резкими изменениями температуры в течение года. В районах с континентальным климатом жаркое лето и очень холодная зима. С помощью дисперсии различия между двумя видами климата можно выразить количественно. Сравним для примера изменение температур в течение года в Москве и Киеве, где климат умеренный, с изменением температур в Новосибирске и Хабаровске, где климат континентальный. В таблице 10 приведены средние месячные температуры за 80 лет в Москве, Киеве, Новосибирске и Хабаровске.

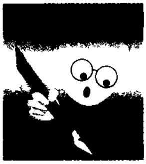
Таблица 10. Средние месячные температуры, °C

Месяцы	Москва	Киев	Новосибирск	Хабаровск
1	−9,3	−5,9	−19,0	−22,3
2	−8,6	−5,2	−17,2	−17,2
3	−3,4	−0,4	−10,7	−8,5
4	5,1	7,5	−0,1	3,1
5	12,4	14,7	10,0	11,1
6	16,7	17,8	16,3	17,4
7	18,4	19,8	18,7	21,1
8	16,6	18,7	16,0	20,0
9	10,9	13,9	9,9	13,9
10	4,4	7,5	1,5	4,7
11	−2,0	1,2	−9,7	−8,1
12	−6,8	−3,5	−16,9	−18,5
Среднее за год	4,5	6,0	−0,1	−1,4
Дисперсия	98,9	86,5	185,2	228,8

Дисперсии этих четырех рядов чисел различны. Для Москвы и Киева это 98,9 и 86,5, для Новосибирска и Хабаровска это 185,2 и 228,8.

Вы видите, что дисперсии для рядов месячных температур в умеренном и континентальном климате значительно различаются.

Мы познакомились еще с одним показателем рассеивания набора — с дисперсией.



Упражнения

1. Для данных чисел вычислите среднее значение. Составьте таблицу отклонений от среднего и квадратов отклонений от среднего и вычислите дисперсию:

а) $-1, 0, 4$; б) $2, 3, 7$; в) $-3, 1, 2, 4$; г) $2, 6, 7, 5$;
д) $-2, -1, 1, 2, 5$; е) $-1, -3, -2, 3. 3$.

2. Даны два набора чисел. Отметьте их на числовой прямой. Вычислите дисперсию каждого из этих наборов. Дисперсия какого набора больше?

а) 2, 3, 7 и 1, 2, 3; б) 2, 3, 4, 7 и 1, 5, 6, 8.

3. Даны два набора чисел. Отметьте их на числовой прямой. Вычислите дисперсию каждого из этих наборов. Сравните дисперсии:

а) 2, 3, 4 и 6, 7, 8; б) 3, 5, 7, 9 и 12, 14, 16, 18.

15*. Обозначения и формулы

Числа в наборах часто приходится обозначать буквами, подобно тому, как это делается при решении задач на движение. Но поскольку чисел может быть много, использовать для каждого числа отдельную букву неудобно. Поэтому поступают иначе: используют одну и ту же букву с номером. Таким образом, можно рассматривать набор x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 или $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ и т. п. Номера чисел называются *индексами*.

Среднее арифметическое набора чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 принято обозначать через $\bar{x}$. Например, среднее арифметическое пяти чисел запишется так:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}.$$

Отклонения чисел от среднего значения теперь запишутся так:

$$x_1 - \bar{x},\ x_2 - \bar{x},\ x_3 - \bar{x},\ x_4 - \bar{x},\ x_5 - \bar{x}.$$

Разберем на примере набора x_1, x_2, x_3, x_4, как записывается в символьном виде дисперсия. Дисперсия равна среднему арифметическому квадратов отклонений этих чисел от среднего значения. Обозначают дисперсию обычно через S^2. Получается:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}.$$

16. Свойства среднего арифметического и дисперсии

Упражнения

1. Запишите с помощью букв набор чисел 17, 3, 6, 21, 15. Чему равно значение x_2 в этом наборе? Чему равно значение x_5 в этом наборе?

2. Пусть a — некоторое число. Вычислите среднее арифметическое $\overline{x}$ и дисперсию S^2 набора чисел:
а) $x_1 = a+1, x_2 = a+2, x_3 = a+3$; б) $x_1 = a+2, x_2 = a+3, x_3 = a+7$.

16*. Свойства среднего арифметического и дисперсии

Буквенные обозначения чисел в наборе и введенные обозначения $\overline{x}$ для среднего арифметического и S^2 для дисперсии набора чисел позволяют легко записать некоторые их свойства. Для простоты записи сформулируем их для набора из пяти чисел. Эти правила верны для любого количества чисел в наборе.

Рассмотрим набор чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Пусть $\overline{x}$ — его среднее арифметическое, а S^2 — дисперсия.

Прибавим к каждому числу этого набора постоянное число a. Получим набор

$$x_1 + a,\ x_2 + a,\ x_3 + a,\ x_4 + a,\ x_5 + a.$$

Свойство 1. Среднее арифметическое набора

$$x_1 + a,\ x_2 + a,\ x_3 + a,\ x_4 + a,\ x_5 + a$$

равно $\overline{x} + a$.

Свойство 2. Дисперсия набора

$$x_1 + a,\ x_2 + a,\ x_3 + a,\ x_4 + a,\ x_5 + a$$

равна дисперсии набора x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Пусть теперь каждое число набора x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 умножено на множитель a. Получается набор

$$ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\ ax_4,\ ax_5.$$

Свойство 3. Среднее арифметическое набора

$$ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\ ax_4,\ ax_5$$

равно $a\overline{x}$.

Свойство 4. Дисперсия набора

$$ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\ ax_4,\ ax_5$$

равна a^2S^2.

Свойства 1—4 среднего арифметического и дисперсии облегчают громоздкие расчеты, особенно когда речь идет о переводе физических величин из одной системы мер в другую.

Например, массу предметов можно измерять в килограммах и в граммах. Если мы знаем среднее и дисперсию массы в килограммах, то с помощью свойств 3 и 4 можно легко вычислить среднее и дисперсию массы в граммах:

для того чтобы получить среднее значение в граммах, надо среднее в значение в килограммах умножить на 1000;

чтобы найти дисперсию массы, измеренной в граммах, нужно дисперсию массы, измеренной в килограммах, умножить на 1000^2, т. е. на 1 000 000.

В этом пункте рассказывалось о том, как изменяется среднее арифметическое и дисперсия набора чисел, если ко всем числам прибавить одно и то же число или все числа умножить на одно и то же число.

Упражнения

1. Среднее арифметическое набора чисел -1, 0, 1 равно 0, а дисперсия равна $\frac{2}{3}$. Пользуясь свойствами среднего и дисперсии, найдите среднее арифметическое и дисперсию набора чисел:

а) 0, 1, 2; б) 1, 2, 3; в) 11, 12, 13.

2. Среднее арифметическое набора чисел 2, 3, 7 равно 4, а дисперсия равна $4\frac{2}{3}$. Пользуясь свойствами среднего и дисперсии, найдите среднее арифметическое и дисперсию набора чисел:

а) 3, 4, 8; б) 0, 1, 5; в) 112, 113, 117.

3. Среднее арифметическое набора чисел 5, 11, 2 равно 6, а дисперсия этого набора чисел равна 14. Не вычисляя, укажите, чему равно среднее арифметическое и дисперсия набора чисел:

а) 50, 110, 20; б) 15, 33, 6; в) -55, -121, -22.

Глава IV. Случайная изменчивость

Величины, с которыми мы имеем дело в жизни, часто изменяются. Иногда мы можем точно указать причины подобных изменений. Иногда эти причины известны нам частично, а порой — неизвестны вовсе. Поэтому для описания изменчивости данных используют понятие случайной изменчивости. Разберем его на практических примерах.

17. Примеры случайной изменчивости

Колебания напряжения в бытовых электрических сетях

Ниже приведены результаты 25 измерений напряжения (в вольтах) в бытовой сети. Все измерения были сделаны в дневное время, в случайно (бессистемно) выбранные моменты времени.

225 В,	227 В,	225 В,	228 В,	225 В,
228 В,	218 В,	217 В,	218 В,	220 В,
223 В,	225 В,	216 В,	222 В,	224 В,
220 В,	218 В,	221 В,	220 В,	216 В,
214 В,	219 В,	231 В,	228 В,	227 В.

Во время измерения напряжения последняя цифра все время изменяется в пределах двух-трех единиц. Поэтому приходится брать среднее значение этих быстро меняющихся показаний вольтметра.

В России номинальное напряжение в бытовых сетях 220 В. Как вы видите, реальное напряжение может отличаться от 220 В. Оно редко равно в точности 220 В. Обычно напряжение либо немного выше этого значения, либо ниже. Напряжение сети понижается в моменты, когда в квартире или в доме включаются дополнительные электрические приборы. Моменты включения и выключения электроприборов являются случайными и приводят к случайной изменчивости напряжения.

Электрические приборы в России рассчитаны на напряжение 220 В. При небольших отклонениях напряжения от 220 В они работают исправно, а при значительных колебаниях напряжения могут прийти в негодность.

Вопросы

1. Какое самое большое напряжение было зафиксировано в период наблюдений?
2. Какое самое маленькое напряжение было зафиксировано?
3. Каков размах значений напряжения?
4. Какова медиана напряжения?
5. Каково среднее значение напряжения?

Урожайность зерновых культур

В таблице 1 представлены данные об урожайности зерновых культур в России с 1992 по 2001 гг. в весе после доработки. Урожайность измеряется в центнерах с гектара. При этом надо решить, какой именно вес будет учитываться в расчетах. Обычно зерно взвешивают дважды: сразу после уборки (исходно оприходованный вес) и спустя некоторое время на элеваторе (вес после доработки). Вес зерна после доработки примерно на 10 % процентов меньше веса зерна сразу после уборки. Вес сокращается за счет высыхания зерна и потерь при транспортировке.

Таблица 1. Урожайность зерновых культур в России в 1992–2001 гг. (вес после доработки)

Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Урожайность, ц/га	18,0	17,1	15,3	13,1	14,9	17,8	12,9	14,4	15,6	19,4

Вопросы

6. Является ли урожайность зерновых культур в разные годы постоянной величиной?
7. Одна или несколько причин, на ваш взгляд, могут влиять на урожайность?
8. Укажите, какие причины могут, на ваш взгляд, повлиять на урожайность.
9. Какие из перечисленных ниже причин могут влиять на урожайность:

а) погодные условия; б) тип почвы; в) удобрения; г) сроки посева;
д) результаты футбольного матча; е) сроки уборки; ж) птицы и насекомые;
з) качество посевного зерна?

Как видно из таблицы 1, урожайность зерновых культур — *изменчивая величина*. Ее значение зависит от многих причин, главные из которых — погодные условия и деятельность человека (удобрения, выбор посевного материала и сроков сева, совершенство уборочной техники). Можно ли найти в этой изменчивости закономерности? Для этого следует провести анализ данных в таблице. Некоторые этапы этого анализа сформулированы в следующих упражнениях.

Упражнения

1. По данным таблицы 1 постройте столбиковую диаграмму урожайности зерновых культур в разные годы.
2. Упорядочите данные таблицы 1 в порядке возрастания.
3. Вычислите средние урожайности зерновых в периоды 1992–1996 и в 1997–2001 гг. Сравните между собой полученные результаты.
4. Составьте таблицу отклонений ежегодной урожайности в 1992–1996 и в 1997–2001 гг. от средних показателей за соответствующие пять лет.
5. Составьте таблицу квадратов отклонений ежегодной урожайности в 1992–1996 и в 1997–2001 гг. от средних показателей за соответствующие пять лет.
6. Что больше подвержено изменчивости: средняя урожайность за пять последовательных лет или урожайность в отдельные годы?

Справка. Совершенствуя выращивание и уборку зерновых культур, люди постепенно добиваются повышения урожайности. Средняя урожайность зерновых культур в СССР в 50-е гг. прошлого века примерно равнялась 8 центнеров с гектара (ц/га) и колебалась около этого значения на 2–3 ц/га. В 70-е гг. средняя урожайность зерновых культур в СССР возросла до 14 ц/га.

Как видно из таблицы 1, колебания урожайности в разные годы могут быть весьма существенны, однако средняя урожайность за пять последовательных лет изменяется значительно слабее. Это происходит потому, что влияние погодных условий на среднюю урожайность за пять лет уравновешивается. Низкие показатели засушливых годов компенсируются высокими показателями урожайных годов. Кроме погодных условий, урожайность зависит от усилий людей, качества посевного зерна, удобрений, уборочной техники и многих других обстоятельств. Однако усилия людей по повышению урожайности в целом по стране сказываются постепенно. Они не влияют резко на среднюю урожайность. Поэтому средние значения урожайности за несколько лет объективно отражают достижения людей по выращиванию зерна. Именно за счет улучшения хозяйствования средняя урожайность в 70-е гг. выросла на 75 % по сравнению с 50-ми гг.

Зачем изучают такие показатели, как урожайность зерновых культур? Производство зерна в России, значительная часть населения которой живет в сельской местности, – один из важнейших экономических и социальных показателей. Производство зерна существенно зависит от урожайности. Для формирования общей политики государства в экономической и социальной областях: обеспечения населения хлебом и продуктами животноводства, развития сельского хозяйства — необходимо изучать причины, влияющие на повышение урожайности. Такие исследования ведутся во многих странах уже не одно столетие. Средние показатели урожайности зерновых культур в некоторых странах с такими же, как в России, климатическими условиями превышают 30—40 ц/га.

Массовое производство

На обертке обычного шоколадного батончика написано, что его масса 50 граммов. Это — номинальная масса или ***номинальный вес***. Ребята купили десять батончиков и взвесили их. Они получили следующие 10 значений (в граммах):

49,1; 50,0; 49,7; 50,5; 48,1; 50,3; 49,7; 51,6; 49,8; 50,1.

Только один батончик весил в точности 50 г. Некоторые батончики весили больше, другие — меньше. В ряде случаев отклонения превышали 1,5 г.

Чтобы понять, всегда ли наблюдается такое явление, ребята купили и взвесили еще одну партию из десяти батончиков. Вот какие значения (в граммах) они получили для второй партии:

49,7; 48,8; 51,4; 49,1; 49,6; 50,9; 48,5; 52,0; 50,7; 50,6.

Упражнения

7. Найдите наибольший и наименьший веса взвешенных шоколадных батончиков в первой партии.

8. Найдите наибольшее абсолютное отклонение от номинального веса батончика в первой партии.

9. Найдите средний вес шоколадного батончика в первой партии. Убедитесь, что он мало отличается от 50 г.

10. Найдите средний вес батончика во второй партии.

11. Убедитесь, что средние веса батончиков в первой и второй партиях мало отличаются друг от друга и от номинального веса.

12. Сколько в каждой партии батончиков, вес которых превышает 50 г? Сколько таких батончиков в обеих партиях? Какую долю и какой процент они составляют?

13. Вес батончика, который вы покупаете, может быть больше или меньше номинального. Можно ли считать, что шансы этих событий равны, если судить по результатам наших взвешиваний?

Ситуация, с которой столкнулись ребята, часто встречается при массовом производстве различных изделий. Если отклонение размера, массы или иной характеристики изделия не сильно отличается от заданного стандарта, т. е. находится в пределах установленной нормы (допуска), то такое изделие считается годным. Такие изделия идут в продажу или дальнейшее производство. Изделия, для которых отклонения превышают допуск, считаются бракованными. Для разных изделий допуски разные. Для фасовки продуктов питания допуски могут быть несколько граммов, для деталей мебели — 1—3 мм, а для подшипников или деталей автомобильного двигателя допуски обычно не превышают 0,001—0,02 мм.

Большие или систематические отклонения от нормы происходят из-за износа или плохой настройки оборудования, неоднородности сырья и других причин. В этих случаях приходится останавливать производство и вносить изменения и поправки. Эти соображения лежат в основе контроля качества продукции, без которого невозможна высокая конкурентоспособность товара.

Историческая справка. В середине 60-х гг. прошлого века в Японии были введены процедуры контроля качества. Каждый рабочий на производстве знал, в каком случае он должен вызвать инженера, а когда немедленно остановить конвейер. Это, наряду с другими причинами, привело к тому, что Япония стала мировым лидером в производстве высокотехнологичной электронной продукции, автомобилестроении и других областях производства.

Этот пункт рассказал о том, что многие величины подвержены случайной изменчивости. Например, напряжение в бытовых электрических сетях, урожайность зерновых культур.

18. Рост человека

Невозможно заранее предсказать рост незнакомого человека. Для исследователя эта величина случайная. Но если измерить рост многих людей (тоже выбранных случайно), то станет видна закономерность. Чтобы в этом убедиться, мы последовательно обсудим данные о росте человека по малому, среднему и большому числу наблюдений.

Малая выборка

В таблице 2 приведен рост (в сантиметрах) десяти случайно выбранных девушек.

Таблица 2. Рост 10 случайно выбранных девушек, см (первая группа)

164	170	160	163	170	171	166	169	166	165

Эти числа показывают, что рост человека изменчив. В этой таблице рост колеблется около 166 см. Среднее арифметическое этого набора чисел равно 166,4 см, а медиана – 166 см. Размах чисел в этой таблице равен 11 см.

В таблице 3 даны сведения о росте других десяти случайно выбранных девушек.

Таблица 3. Рост 10 случайно выбранных девушек, см (вторая группа)

167	164	168	164	167	165	164	158	159	167

Эти числа еще раз подтверждают, что рост человека изменчив. Среднее и размах этой выборки несколько другие, что тоже подтверждает изменчивость. Числа в таблице 3 колеблются около 164 см (среднее арифметическое равно 164,3 см, медиана – 164,5 см). Размах этих колебаний 10 см.

Мы видим, что числа в таблицах 2 и 3 заметно различаются. Различия могут быть велики как для одной выборки, так и для чисел из разных выборок. Однако средние значения этих чисел различаются значительно меньше: разность между средними арифметическими всего 2,1 см (166,4 – 164,3), разность между медианами 1,5 см (166 – 164,5).

Следовательно, **среднее арифметическое и медиана более устойчивы, чем результаты отдельных измерений**. Это – единственная закономерность, которую можно заметить, пользуясь только таблицами 2 и 3.

Средняя выборка

Пополним наш запас наблюдений. К двадцати значениям роста добавим еще тридцать значений новых наблюдений и занесем их в таблицу 4.

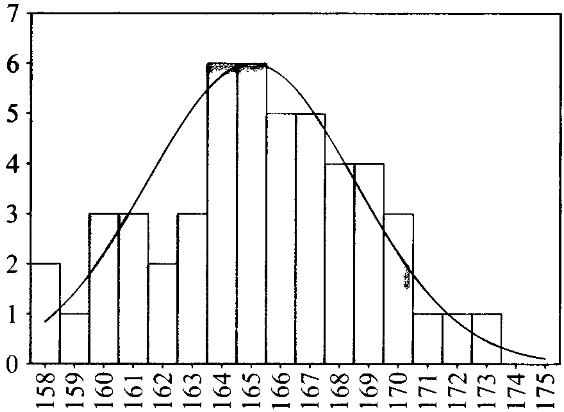
Таблица 4. Рост 50 случайно выбранных девушек, см

164	170	160	163	170	171	166	169	166	165
167	164	168	164	167	165	164	158	159	167
161	169	162	170	168	165	165	166	164	173
158	166	168	167	161	167	165	168	165	164
163	169	161	162	163	160	166	169	172	160

Среднее значение роста в этой выборке равно 165,3 см, а медиана – 165 см. Эти значения мало отличаются от тех, что были получены для первых двух выборок. А вот размах колебаний роста увеличился до 15 см. Это естественно. Чем больше человек мы случайно выбираем, тем больше шансы, что среди них попадутся более высокие и более низкие люди. Поэтому размах значений роста может увеличиваться, а среднее значение роста остается практически неизменным.

Трудно изучать эту совокупность чисел, читая в таблице одно число за другим. Лучше представить этот набор чисел наглядно, например в виде столбиковой диаграммы. По оси абсцисс будем откладывать рост, начиная с наименьшего значения 158 см, с шагом 1 см. Высота столбика будет показывать, сколько в выборке девушек с заданным ростом.

Диаграмма 1. Число девушек с заданным ростом для выборки из 50 наблюдений



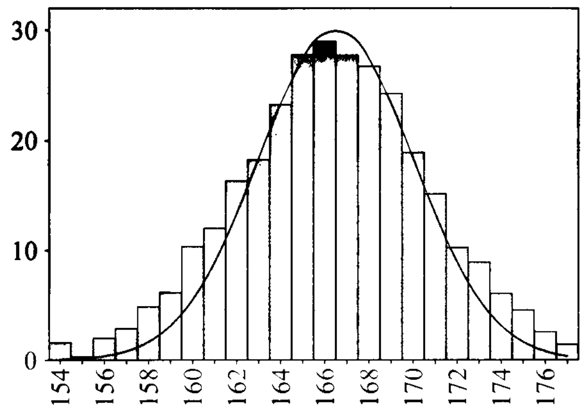
На диаграмме 1 видно, что девушек с ростом около 165 см больше, чем девушек, рост которых сильно отклоняется от среднего значения. Получившаяся диаграмма по форме отдаленно напоминает колоколообразную кривую.

Большая выборка

Добавим к уже имеющимся 50 наблюдениям из таблицы 4 еще 250 новых данных. Теперь в нашей выборке 300 чисел — рост 300 наудачу выбранных девушек. Еще раз построим столбиковую диаграмму числа девушек с заданным ростом (диаграмма 2). Ее сходство с колоколообразной кривой усилилось.

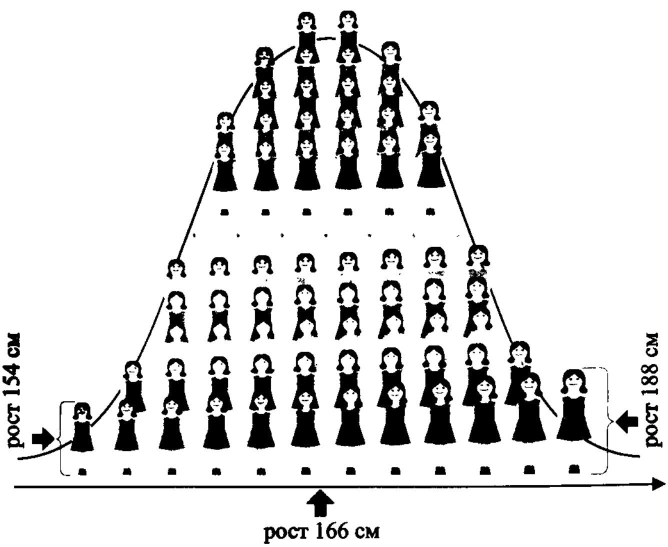
Другими словами, поведение изменчивых величин в больших наборах наблюдений становится предсказуемым. Зная форму колоколообразной кривой, можно примерно указать число девушек в большой выборке, рост которых находится в заданных пределах. Например, можно утверждать, что доля девушек

Диаграмма 2. Число девушек с заданным ростом для выборки из 300 наблюдений



с ростом от 162 до 170 см составляет около 70 %, а тех, чей рост превышает 170 см, — около 15 %.

Форму и положение этой кривой можно задать с помощью двух чисел: среднего значения и дисперсии набора наблюдений.



Среднее значение указывает на горизонтальной оси точку, в которой колоколообразная кривая имеет наибольшее значение. Средний рост девушек равен примерно 166 см. Дисперсия показывает величину отклонений наблюдений от среднего. Чем она больше, тем более пологой выглядит колоколообразная кривая. При маленькой дисперсии колоколообразная кривая, наоборот, становится островерхой. Все наблюдения при этом лежат близко к своему среднему значению.

Практический опыт показывает, что не только рост людей подчиняется подобной закономерности. Точно так же описывается изменчивость массы батончиков, параметров продукции при массовом производстве, размеров листьев на деревьях и многих других величин. **Это пример одной из закономерностей, которые присущи случайной изменчивости.** Эти явления мы будем изучать в дальнейшем в курсе теории вероятностей.

В этом пункте рассказывалось об изменчивости человеческого роста, о колоколообразной кривой, которая описывает эту изменчивость. Еще мы узнали, что эта кривая описывает изменчивость не только роста, но и многих других величин.

19. Точность измерений

Число жителей города

Посмотрим на данные из таблицы 5 о населении городов Подмосковья. Вы видите, что число жителей городов дано в тысячах человек.

Таблица 5. Население крупнейших городов Подмосковья в разные годы, тыс. чел.

Город	1979	1989	2002	2006
Балашиха	117	135	148	183
Подольск	202	208	182	180
Химки	119	134	141	180
Мытищи	141	155	159	162
Люберцы	154	165	157	159
Коломна	147	155	150	148

Одна тысяча человек служит в этих данных единицей измерения. Мы понимаем, что число жителей городов дано приближенно, что истинное число жителей не кратно тысяче.

Но что такое «истинное число жителей» города в таком-то году? В течение года люди в город приезжают и уезжают, рождаются и умирают. Поэтому число жителей города не постоянно и меняется на протяжении года каждый день. Если подсчитывать людей ежедневно в маленьких городах, то различия составят десятки человек, в средних городах — сотни. Но число тысяч людей, населяющих город среднего размера, за день, скорее всего, не изменится. Поэтому данные о населении городов в таблице 1 даны в тысячах человек. Более высокая точность подсчетов в данном случае не имеет смысла из-за изменчивости числа жителей.

Рост человека

Когда мы говорим о росте человека, мы округляем данные до сантиметра. Так измеряет свой рост каждый человек в России или в Европе. А вот в Соединенных Штатах Америки рост измеряют в ***дюймах***. Один дюйм (1″) — это примерно 2,54 см.

Ясно, что рост человека не обязан выражаться целым числом сантиметров или дюймов. Рост может быть выражен любым числом, и нетрудно измерить рост с большой точностью.

Причина округления значения роста до сантиметров примерно та же, что и для численности городов: неполная определенность самого понятия «рост человека» и то, что принятая точность измерения достаточна для практических нужд.

Дело в том, что рост человека не остается постоянным в течение суток: утром рост человека больше, чем вечером. За день под влиянием нагрузки хрящи в суставах позвоночника и ног человека несколько сплющиваются, сжимаются, а за ночь, когда человек лежит, — вновь расправляются.

Зачем вообще измерять рост человека? Знать свой собственный рост нам, действительно, не очень важно — разве что при покупке одежды. Но и тут нам нужно знать скорее свои размеры, чем рост. Измерения роста, окружности груди, талии, бедер нужны не столько покупателям, сколько изготовителям одежды. В зависимости от того, как часто встречаются различные комбинации этих параметров, надо изготавливать в определенных пропорциях одежду тех или иных размеров.

Точность роста при пошиве готовой одежды составляет обычно 6 см, т. е. значительно больше, чем один сантиметр. Поэтому измерение роста с точностью до 1 сантиметра или даже 1 дюйма вполне достаточно.

19. Точность измерений

Расстояние между городами

Расстояние между городами — еще один пример не вполне точно определенной величины. Это расстояние обычно измеряют не по прямой линии, а вдоль шоссе или железной дороги, соединяющей города.

Мы понимаем, как измерить расстояние между двумя точками вдоль некоторой линии. Но город — это не точка, а довольно обширная территория. К тому же граница между городом и его пригородами не всегда отчетлива. Поэтому расстояние между городами точно определить нельзя.

В России за расстояние между городами принимают расстояние между их центральными почтамтами. Этот способ определения расстояния появился одновременно с регулярной почтовой службой. Расстояние между городами можно измерить с точностью до километра.

Для практических целей точность, с которой расстояния указаны в автомобильном атласе, вполне достаточна. Расстояние нужно знать, чтобы рассчитать, например, время в пути или расход горючего. Как мы уже знаем, обе эти величины подвержены случайным колебаниям из-за погоды, состояния дороги, интенсивности движения и т. п. Опыт показывает, что влияние этих случайных факторов гораздо больше, чем неточность в определении расстояния.

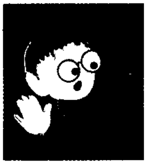
Результаты соревнований

Цена деления ручного механического секундомера — одна десятая секунды. Таким секундомером можно измерить, как быстро школьник пробегает 60 метров. Разброс результатов школьников достаточно велик — 2—3 секунды, и не составляет труда сказать, кто из школьников самый быстрый, а кто занял второе или третье место. Нужен ли более точный секундомер для измерения времени бега школьников? Скорее всего, нет. Ведь на результаты этого измерения влияет неточность включения секундомера по команде «марш» и неточность фиксирования момента финиша. Неточности судьи-человека при этом составляют примерно ту же одну десятую долю секунды. Поэтому более высокая точность ручного механического секундомера не нужна.

Если же речь идет о чемпионате мира по бегу, то результаты у бегунов могут быть очень близкими. Различить такие результаты с помощью механического секундомера невозможно. Необходимы специальные электронные системы для фиксирования времени старта и финиша. В таких системах ошибки судьи отсутствуют. Точность измерения электронных систем на чемпионатах мира составляет одну сотую долю секунды. Если и ее оказывается недостаточно, то судьи изучают результаты фотофиниша, чтобы определить победителя.

Приведенные примеры говорят о том, что **выбирать точность измерения надо так, чтобы неизбежные округления не влияли на последующие выводы**. Слишком высокая точность измерения и вычислений не нужна, а иногда даже вредна. Излишне точные измерения отнимают время, силы и даже могут порождать ошибки.

В этом пункте объяснялось, что точность измерения для разных величин должна быть разной и что слишком большая точность даже может быть вредна.



Вопросы

1. Численность населения страны обычно измеряется с точностью до ста тысяч человек. Ответьте на следующие вопросы.

а) Можно ли совершенно точно определить понятие «численность населения страны»?

б) Приведите несколько причин, влияющих на изменчивость числа жителей страны.

в) Как вы думаете, зачем нужно знать численность населения страны?

г) Нужно ли знать численность населения страны с точностью до 100 человек, до тысячи человек?

2. Школьная линейка и метр размечены с точностью до 1 миллиметра.

а) Как вы думаете, хорошо ли человеческий глаз способен различать разницу в 1 мм на расстоянии 1 м?

б) Почему размеры мебели обычно указывают в миллиметрах, а не в сантиметрах?

в) Можно ли измерить величину молекулы школьной линейкой?

г) Попробуйте привести примеры, когда точность измерения до 1 мм явно не достаточна?

3. Почему напряжение в бытовой электрической сети мы измеряем обычно с точностью до 1 вольта?

Упражнения

1. Выберите подходящую единицу измерения:

а) массы космического корабля;

б) массы океанского корабля;

в) массы автомобиля;

г) массы шоколадки.

Глава V. Случайные события и вероятность

20. Случайные события

О некоторых событиях мы можем твердо сказать, что они произойдут. В наступлении других событий мы не так уверены. Например, в самый жаркий и солнечный летний день мы твердо знаем, что лето кончится, наступит осень, а затем зима. Но невозможно сказать заранее, будет эта зима теплой или холодной.

Мы также не можем предвидеть, будет ли следующий год влажным или засушливым, урожайным или нет, хотя все эти события влияют на нашу жизнь. В неурожайный год дорожает хлеб, предприятия сельского хозяйства несут убытки, а некоторые из них могут разориться. Урожайный год тоже лучше бы предвидеть (хотя бы затем, чтобы приготовить хранилища для зерна).

Нельзя предвидеть многие события даже недалекого будущего. Например, летом при некоторых состояниях атмосферы гро́зы становятся частыми. Но и тогда нельзя предвидеть утром, будет ли гроза днем. Можно лишь говорить о шансах этого события. В прогнозах погоды эти шансы стараются учесть. Там можно встретить выражения вроде «дождь сегодня маловероятен», «вероятность дождя 10 %», «к вечеру возможно усиление ветра» и т. п.

Для нефтедобывающих стран, к которым относится Россия, важны международные цены на нефть. Безошибочно предвидеть эти цены не удается, хотя многие стараются это сделать. При составлении бюджета государства на следующий год важно знать, превысит ли средняя цена на нефть некоторый уровень или нет. Если превысит, то в бюджете можно предусмотреть определенные траты, а если нет — то нельзя. Например, бюджет России на 2004 г. был составлен, исходя из предположения, что средняя цена окажется не меньше 22 долларов за ***баррель***. (Баррель — от «бочка» — единица объема, принятая для нефти; примерно 159 литров.) Предполагается, что с большой вероятностью реальная цена окажется выше этой.

Перед началом футбольного чемпионата мы не можем с полной уверенностью назвать ни победителя, ни призеров. Мы можем обсуждать шансы различных команд, говорить об их вероятностях на победу, но лишь по окончании чемпионата станет ясно, кто и какое место в нем занял.

Все упомянутые выше события — ***случайные***.

Определение. Мы называем событие ***случайным***, если нельзя утверждать, что это событие в данных обстоятельствах непременно произойдет.

Примеры случайных событий можно приводить и описывать бесконечно. Невозможно предсказать длительность начавшегося или будущего телефонного разговора; нельзя знать, сколько ошибок сделает школьник в предстоящей контрольной работе. При бросании игральной кости невозможно предсказать, какая из шести граней выпадет. Невозможно предвидеть число крупных пожаров в городе на будущей неделе, число землетрясений в будущем году. Невозможно предвидеть, на какой билет лотереи выпадет главный выигрыш, и множество иных событий.

В этом пункте мы рассказали о том, что такое случайные события.

Вопросы

1. Какие события мы называем случайными?
2. Является ли случайным событие «Меня завтра спросят на уроке»?
3. Является ли случайным событие «Летом у меня будут каникулы»?
4. Является ли случайным событие «Мне сегодня встретится черная кошка»?
5. Вообразите, что вы отправились на рыбную ловлю. Какие случайные события могут произойти при этом?
6. Приведите примеры случайных событий из вашей школьной жизни.

21. Вероятности и частоты

О случайном событии мы не можем сказать заранее, произойдет оно или нет. Но мы можем говорить о шансах наступления этого события.

Например, обсуждая будущую встречу футбольных команд А и Б, кто-то может сказать, что их шансы на победу относятся как 1 к 2. Всем при этом будет понятно, что этот человек считает победу команды Б вдвое более вероятной, чем победу команды А. В подтверждение своего мнения он скажет, что команды А и Б встречались много раз и при этом команда А победила приблизительно в одном матче из трех, а команда Б – в двух матчах из трех. Поэтому он и говорит, что вероятность события «А победит Б» равна $\frac{1}{3}$, а вероятность события «Б победит А» равна $\frac{2}{3}$. (В этом рассуждении мы не учитывали ничьи.)

21. Вероятности и частоты

При бросании игральной кости шансы выпадения единицы такие же, как выпадения двойки. А шансы выкинуть или не выкинуть шестерку относятся как 1 к 5.

Некоторые случайные события происходят очень редко. Поэтому мало шансов, что они произойдут. Маловероятно, например, что 31 января будет гроза или что на купленный Иваном Ивановичем лотерейный билет выпадет крупный выигрыш.

Другие случайные события происходят очень часто, почти всегда. Таким, например, является событие «31 января грозы не будет», которое противоположно событию «31 января будет гроза».

В теории вероятностей шансы того, что случайное событие произойдет, выражают числом. Это число называют ***вероятностью случайного события***. Если событие никогда не наступает (его шансы равны нулю), то вероятность этого события полагают равной 0. Такое событие называют ***невозможным***. Если же событие наступает всегда, его вероятность полагают равной 1. Такое событие называют ***достоверным***. Вероятности остальных событий — это числа между 0 и 1.

Таким образом, **вероятность случайного события** — это числовая мера его правдоподобия.

Иногда вероятности событий можно рассчитать математически, а иногда приходится приближенно узнавать их из экспериментов.

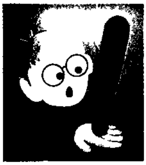
Всякое случайное событие связано с определенными условиями. Вне этих условий это событие вообще невозможно. Например, о шансах спортивных команд на победу можно говорить, только если эти команды могут встретиться и сыграть. О вероятности выпадения числа на игральной кости можно говорить, только если эту кость бросают.

Если мы создаем такие условия, мы тем самым производим некоторый ***случайный эксперимент***, или ***опыт***. Повторяя этот опыт много раз, мы увидим, сколько раз интересующее нас событие происходит, а сколько раз — не происходит.

Пусть, например, мы провели опыт 100 раз и некоторое событие C произошло в этих опытах 45 раз. Отношение числа тех опытов, в которых событие C произошло, к общему числу проведенных опытов равно в данном случае

$$\frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

Число 0,45 называется ***частотой*** события C.



Определение. Отношение числа тех опытов, в которых событие C произошло, к общему числу проведенных опытов называется ***частотой случайного события*** C в этой серии опытов.

Например, если событие не наступило ни разу, то его частота равна 0. Если событие наступало каждый раз, то его частота равна 1.

Вероятности и частоты связаны. Если опыт повторять достаточно много раз, то **частота события будет близка к его вероятности.**

Этот факт связывает теорию вероятностей с нашей практикой. Он позволяет находить вероятности из опыта и предсказывать частоты наступления событий по их вероятностям.

Если вероятность события мала (например, 0,01), то событие будет наступать редко и его частота будет мала. Такие события называют ***маловероятными***. В практических ситуациях, когда опыт проводят один раз, маловероятные события считают невозможными. Например, можно выиграть в лотерее большие деньги и жить безбедно, не учась и не работая. Но вероятность этого события настолько мала, что разумные люди на это не рассчитывают.

Однако, пренебрегая маловероятными событиями, надо учитывать возможные последствия. Вероятность попасть под машину, перебегая через улицу, невысока, но последствия этого события таковы, что относится к нему как к невозможному не следует. Поэтому перебегать через улицу нельзя!

Здесь речь шла о том, что такое вероятность и что такое частота. Мы узнали, что вероятности и частоты близки друг к другу, если один и тот же опыт повторять много раз.

Вопросы

1. Что такое частота случайного события? Как частота связана с вероятностью?
2. Какие значения может принимать вероятность случайного события?
3. Какие события называют достоверными? Чему равна вероятность достоверных событий?
4. Какие события называют невозможными? Чему равна вероятность невозможного события?
5. Приведите примеры невозможных и достоверных случайных событий.
6. Приведите примеры маловероятных событий. Обсудите, какими из них можно, а какими нельзя пренебрегать в одном испытании.

Упражнения

1. Укажите, какие из перечисленных событий, по вашему мнению, являются достоверными, а какие — невозможными:

а) монета, брошенная на гладкую жесткую поверхность, встала на ребро;

б) на игральном кубике кости выпало 7 очков;

в) на игральном кубике выпало от одного до шести очков;

г) номер открытой страницы в книге — дробное число;

д) номер открытой страницы в книге не меньше 1;

е) 1 января в школе не будет уроков.

2. Являются ли достоверными события:

а) на игральной кости выпало четное число очков;

б) на игральной кости выпало целое число очков?

3. Какова, по вашему мнению, вероятность события:

а) завтра на улице вам встретится Баба-Яга;

б) число дней в следующем месяце не превысит 31;

в) в вашей ванне поселится красный крокодил в синюю полоску;

г) на морозе вода в стакане через некоторое время замерзнет;

д) сборная вашего класса выиграет в футбол у «Спартака».

22. Монета и игральная кость в теории вероятностей

Многие важные и нужные факты первоначально были получены с помощью очень простых опытов. Большую роль в развитии теории вероятностей как науки сыграли обычные монеты и игральные кубики.

Симметричная монета

Математическая монета, используемая в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и достоинства. Она не сделана ни из какого материала и не может служить платежным средством.

Монета с точки зрения теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых называется «орел», а другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх. Никакие другие свойства математической монете не присущи.

Название «орел» для обратной стороны (реверса) монеты происходит оттого, что на реверсе российских монет изображен герб Российского государства — двуглавый орел. Впервые орел на монетах появился при великом князе Иване III.

А название «решка» для лицевой стороны (аверса) монеты возникло потому, что рисунок на аверсе российских монет в XVIII–XIX вв. напоминал решетку, на фоне которой был написан номинал монеты (ее достоинство).

Математическая монета считается ***симметричной***. Это означает, что **брошенная на стол монета имеет равные шансы выпасть «орлом» или «решкой»**. При этом подразумевается, что никакой другой исход бросания монеты невозможен, – она не может потеряться, закатившись в угол, и, тем более, не может «встать на ребро».

Настоящая металлическая монета служит лишь иллюстрацией для математической монеты. Настоящая монета может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты бросания. Тем не менее, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросали, бросаем и будем бросать обычную монету (без явных дефектов).

Рис. 1. Российский ефимок 1654 г.

Рис. 2. Реверс монеты образца 1992 г.

Монета часто помогала людям в сложной ситуации сделать выбор, положившись на судьбу. В пьесе А. Н. Островского «Бесприданница» есть эпизод, когда купцы Кнуров и Вожеватов с помощью игры в орлянку решают, кому достанется Лариса:

ВОЖЕВАТОВ. Да вот, лучше всего. *(Вынимает из кармана монету и кладет под руку.)* Орел или решетка?

КНУРОВ *(в раздумье)*. Если скажу: орел, так проиграю; орел, конечно, вы. *(Решительно.)* Решетка.

ВОЖЕВАТОВ *(поднимая руку)*. Ваше. Значит, мне одному в Париж ехать. Я не в убытке; расходов меньше.

И до сих пор монета часто используется как средство решения споров. В начале футбольного матча арбитр бросает монету, чтобы решить, какая из команд получит право начать игру.

Игральные кости в теории вероятностей

Игральный кубик или ***игральная кость*** также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральная кость имеет удивительную историю. Игра в кости – одна из древнейших. Она была известна в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме.

Игральные кости в виде кубиков находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. Точки на гранях древнеегипетских костей часто изображались в виде птичьего глаза.

Правильные (симметричные) кости обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими и одинаково гладкими. Вершины и рёбра кубиков должны иметь правильную форму. Если они скруглены, то все скругления должны быть одинаковыми. Отверстия, маркирующие очки на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину. Сумма очков на противоположных гранях правильной кости равна 7.

Математическая игральная кость, которая обсуждается в теории вероятностей, – это математический образ правильной кости. Выпадения всех граней равновозможны. Подобно математической монете, математическая кость не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни иных материальных качеств.

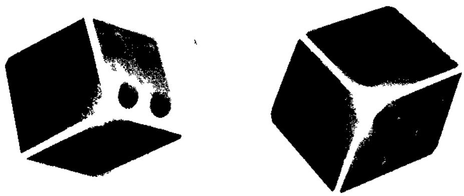


Рис. 3. Игральные кости

Игры в кости у разных народов мира

Об играх с костями животных (игры в «лодыжки», «костыги», «козули») у славян и на языческой Руси свидетельствуют многочисленные археологические находки на обширной территории. Отсюда и русское название игрального кубика – кость.

В острогах заключенные играли парой костяных кубиков с очками на гранях, называя их «быками». Выражение «быков гонять» до сих пор означает игру в кости.

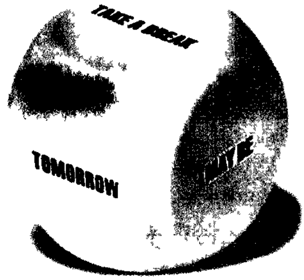


Рис. 4. «Антистрессовая кость». На ее гранях по-английски написано «завтра», «может быть», «сделай перерыв» и т. п.

Рис. 5. Игральная кость, найденная при раскопках в Великом Новгороде

Ранние упоминания о костях в древнеиндийской поэзии отражают популярность игры в кости в Древней Индии. «Гимн игрока» — первый литературный текст, упоминающий кости, — изображает их как враждебную человеку магическую стихию:

Ведь кости усеяны колючками и крючками,
Они порабощают, они мучают, испепеляют,
Одаряют, как ребёнок, победителя они вновь лишают победы.
Неудачливый игрок пытается заклясть кости, заключает с ними мир:
Заключите с нами дружбу! Помилуйте нас!

В Древней Греции считалось, что игральные кости придумал Паламед во время Троянской войны. Но по версии философа Геродота, кости изобрели лидийцы, населявшие Малую Азию, чтобы отвлечься от голода, болезней или других напастей.

В Древнем Риме кости, вероятно пришедшие из Древней Греции, быстро приобрели популярность. В кости играли все, от рабов до императоров. Император Клавдий даже написал книгу по игре в кости. В III в. до н. э. в Риме игра в кости была запрещена и разрешалась лишь во время ежегодного празднования Сатурналий.

Запреты на игру в кости

Азартные игры в кости запрещали не только в Древнем Риме. В Древнем Китае за игру в кости можно было попасть на каторгу.

С появлением христианства кости время от времени запрещались в разных странах, поскольку, по мнению духовенства, игра эта была порождением дьявола. Человек, играющей в кости, при этом якобы становился слугой дьявола, распространяя зло.

В другое время кости были разрешены, и игра в них даже поощрялась, при этом каждому сочетанию очков приписывалось некоторое божественное значение. Считалось, что игра в кости позволяет благочестивому человеку выявить свои христианские добродетели. Очевидно, такие крайности в отношении азартных игр свидетельствуют о том, что изжить их церковь не могла, но иногда пыталась использовать страсть к игре в своих целях.

В 1188 г. английский король Генрих II запретил играть в кости крестоносцам.

Многочисленные королевские указы в XIII—XIV вв. запрещают игру в кости во Франции. Надо полагать, запреты эти оказались безрезультатными, поскольку королевским указом от 1396 г. запрещаются уже не сами кости, а изготовление и применение поддельных костей.

Поддельные кости

Игра в кости в самых разных проявлениях намного древнее всех прочих игр. Поэтому и жулики (шулеры), нечестным способом выигрывающие в кости, появились намного раньше карточных шулеров. Археологи находят в раскопах Древнего Китая, Греции и Рима игральные кости, у которых нарушена симметрия.

Все рассуждения о равных вероятностях выпадения различных комбинаций справедливы, если кость имеет кубическую форму и ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Изменение формы или смещение центра тяжести меняет свойства кости. Кости неправильной формы — самый обычный тип шулерских костей. Иногда в кости вплавляют свинцовые шарики, в них делают замаскированные пустоты, каналы, по которым переливается ртуть.

Нарушить равновозможность выпадения граней можно, сделав некоторые грани чуть выпуклыми, а другие — чуть вогнутыми. Достаточно сделать одни из граней более гладкими, чем другие. Все эти способы предназначены для изменения вероятностей выпадения очков.

Есть еще способ плутовства — нарушение разметки костей. Если сумма очков на противоположных гранях не равна 7, то искусный мошенник, определенным образом бросая кости, может добиться, что сумма выброшенных им очков будет больше, чем у неискушенного игрока.

Мы рассказали немного об истории названий «орел» и «решка» и об игральных костях. Но самое главное — в этом пункте рассказывалось, в чем разница между настоящими и математическими монетами и костями.

23. Как узнать вероятность события?

В некоторых случаях вероятность события можно установить, зная свойства самого события или обстоятельства, в которых оно может наступить. Например, при бросании монеты (если эта монета не испорчена) естественно считать, что шансы на появление орла и решки одинаковы, и поэтому вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{2}$.

То же относится и к «правильной» игральной кости. Она имеет шесть граней. Кость симметрична, и поэтому вероятности выпадения всех граней мы полагаем одинаковыми и равными $\frac{1}{6}$.

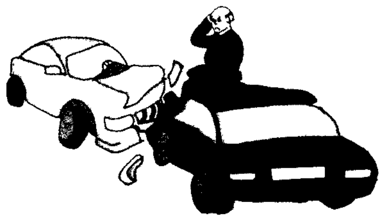
Но рассчитать вероятность события удается в редких случаях. И даже в этих случаях остается место для сомнений. Дело в том, что расчеты непременно основываются на каких-либо предположениях. А предположения могут оказаться неточными или даже ошибочными.

Например, мы предполагаем, что монета симметрична. Это предположение лишь приблизительно верно, так как стороны настоящей монеты все же не одинаковы. Для некоторых монет различия могут быть заметными.

Экспериментальный способ определения вероятности основан на наблюдениях. Выше было сказано, что при многократных повторениях опыта частоты случайных событий оказываются близки к их вероятностям. Поэтому если опыт можно повторять достаточно много раз, то вероятность случайного события можно приближенно найти, вычисляя его частоту.

23. Как узнать вероятность события?

Рассмотрим связь частот и вероятностей на примере страхования. С 2004 г. в России действует закон об обязательном страховании автогражданской ответственности. Согласно этому закону каждый владелец автомобиля должен заключить договор с какой-либо уполномоченной страховой компанией. По этому договору владелец машины платит компании определенную сумму, а компания взамен обязуется оплатить (до определенного предела) тот ущерб, который может быть нанесен этим автовладельцем другому автовладельцу, городской собственности или пешеходам. Чтобы по справедливости решить, кто и сколько должен платить, надо учесть два обстоятельства:



а) с какой вероятностью автомобиль (в течение срока страхования) может попасть в аварию;

б) какой в среднем ущерб окружающим наносит одна авария.

Зная это, можно вычислить страховые взносы, но об этом речь пойдет позже. Сейчас же надо сказать, что вероятность случайного события «в течение года автомобиль попадает в аварию» была вычислена по статистическим данным, которыми располагали страховые компании, государственная инспекция безопасности дорожного движения и другие организации. Эта вероятность оказалась примерно равной 0,015.

Мы обсудили, как с помощью наблюдений можно узнать вероятность повторяющегося события. Кроме того, мы рассказали, что знать вероятности событий необходимо тем, кто занимается страхованием.

Вопросы

1. Какие вы знаете способы для определения вероятностей?

2. Какие предположения мы используем, когда рассчитываем вероятность того, что брошенная монета упадет орлом вверх? Верны ли эти предположения для:

а) падающего бутерброда; б) листьев, падающих с дерева?

3. Что требуется для определения вероятностей экспериментальным путем?

4. Можно ли экспериментальным путем вычислить примерную вероятность следующих событий:

а) вас спросят на уроке; б) на уроке в классе присутствуют все ученики;

в) вы не сделаете в изложении ни одной ошибки;

г) любимая мамина ваза разобьется в результате падения со стола на пол.

Упражнения

1. По своему личному опыту попробуйте определить вероятность того, что вас спросят во время урока.

2. По своим наблюдениям попробуйте определить вероятность того, что на уроке присутствуют все ученики класса.

3. По своему личному опыту попробуйте определить вероятность того, что число задач по математике, заданных на дом, будет четным.

4. По своему личному опыту попробуйте определить вероятность того, что число задач по математике, заданных на дом, будет:

а) больше 2; б) больше 3; в) больше 10.

5. Можно ли приближенно вычислить вероятность опоздания ученика на урок? Если можно, что для этого нужно сделать?

24. Зачем нужно знать вероятность события?

Как понимать вероятность?

Что может дать знание вероятности случайного события? Как эти знания можно использовать?

Частично мы ответили на этот вопрос, рассказывая о страховании автомобиля. Знать вероятность дорожно-транспортного происшествия нужно, чтобы вычислить взнос за страховой полис.

Но это не единственная польза, которую может принести знание вероятностей. Если мы знаем вероятности каких-либо событий, то часто удается вычислить вероятность явления, связанного с этими событиями. Это особенно важно при проектировании зданий и сооружений, расчете надежности систем автомобилей, самолетов и космических кораблей.

Зная вероятность события, мы можем предсказать, насколько часто это событие будет происходить в жизни.

Предположим, например, что при определенных условиях в некоторой местности вероятность урагана равна 0,25. Это значит, что при многократных повторениях упомянутых условий примерно в 25 % случаев начнется ураган. Учитывая, что ураган очень опасен, можно считать, что вероятность 0,25 достаточно высока, чтобы объявить штормовое предупреждение. И неважно, что ураган может не случиться. В таком случае лучше перестраховаться.

Если какое-то событие имеет вероятность 0,99, то в среднем его следует ожидать в 99 случаях из 100, т. е. почти всякий раз. Напротив, если событие имеет вероятность 0,01, то происходит оно редко, примерно в одном случае из ста.

Говоря, что событие произойдет примерно в 25 случаях из 100, мы не утверждаем, что оно непременно случится 25 раз из 100 возможных. Оно может произойти и 22, и 23, и 24, и 25, и 26, и 27, и 28 раз. Оно даже может произойти всего 18 раз или 32 раза в какой-нибудь серии из 100 наблюдений. Но такие серии наблюдений будут встречаться довольно редко.

Если вероятность события равна 0,25, то не следует ожидать его появления, скажем, 1 или 99 раз из 100.

Маловероятные события

Мы уже говорили, что в повседневной жизни маловероятные события часто считают практически невозможными. Люди следуют правилу: **в однократном опыте маловероятное событие не происходит**.

Конечно, в строгом смысле, это правило неверно. На него нельзя полагаться, если от этого зависит чья-то жизнь или здоровье. Нужно помнить, что **маловероятные события иногда происходят**. И если оно произойдет — если обрушится здание, внезапно выйдут из строя тормоза в автомобиле, — потом будет поздно вспоминать, какая была маленькая вероятность этого события. Поэтому, чтобы предотвратить несчастье, нужно регулярно проверять тормоза, вовремя ремонтировать или сносить ветхие здания и принимать другие необходимые меры.

Есть очень меткая поговорка «незаряженное ружье стреляет один раз в жизни». Это как раз о маловероятных событиях, которые все же происходят.

К сожалению, часто люди из-за своего легкомыслия недооценивают вероятность несчастья и ничего не предпринимают, чтобы уменьшить эту вероятность или хотя бы не дать ей вырасти.

Например, вероятность столкновения «Титаника» с айсбергом была маленькой. Капитан Эдвард Смит мог ее еще уменьшить, снизив скорость судна, но не сделал этого. Сотни человек стали жертвами маловероятного события в ночь на 15 апреля 1912 г.

Если же маловероятное событие грозит лишь незначительными потерями или неприятностями, то люди обычно следует правилу «в однократном опыте маловероятное событие не происходит».

В этом пункте рассказывалось о том, что вероятность события позволяет предсказать, насколько часто его следует ожидать в будущем. Помимо этого, мы поговорили о маловероятных событиях и о том, что ими не всегда следует пренебрегать.

Вопросы

1. Падение сосульки с крыши на голову пешехода — событие маловероятное. Что нужно делать для того, чтобы эту вероятность еще уменьшить?

2. В каких случаях не следует доверяться правилу «в однократном опыте маловероятное событие не происходит»?

3. Приведите несколько примеров маловероятных событий.

Упражнения

1. Для правильной монеты мы полагаем, что вероятность выпадения орла равна 0,5. Разумно ли ожидать что, при 100 бросаниях монеты орел выпадет:

а) 5 раз; б) 49 раз; в) 90 раз.

2. Подбросьте монету 10 раз. Удалось ли вам с первой попытки выбросить десять орлов? Можно ли считать такое событие маловероятным?

3. Бросьте игральную кость 6 раз. Удалось ли вам выбросить шесть «шестерок»? Можно ли считать такое событие маловероятным?

4. Вероятность выпадения шестерки на игральной кости равна $\frac{1}{6}$. Сколько раз, по вашему мнению, следует ожидать выпадение шестерки при 600 бросаниях кости?

5. Игральную кость бросают 6 раз. Может ли при этом ни разу не выпасть шестерка?

6. Игральную кость бросают 6 раз. Может ли при этом какое-то число очков выпасть дважды?

7. Правильную игральную кость бросили 6 раз. Оказалось, что единица выпала дважды. Означает ли это, что какое-то число очков не выпало ни разу?

8*. В тесте 16 задач с выбором ответа из четырех предложенных вариантов. Верный вариант только один. Тройку ставят за 4 правильных ответа, четверку за 12, а пятерку за 15 правильных ответов. Вася не готов к тесту и выбирает ответы наудачу. Разумно ли ожидать, что Вася получит:

а) отметку 3; б) отметку 4; в) отметку 5?

Глава VI. Математическое описание случайных явлений

25. Случайные опыты

Снова обратим ваше внимание на то, что случайное событие может осуществиться только при определенных условиях. Если таких условий нет, то нет и события.

Например, случайное событие «появление орла» возможно только в опыте с подбрасыванием монеты. Без этого действия о выпадении орла нельзя говорить. О случайном событии «электрическая лампочка прослужит более 100 часов» можно говорить, только если имеется лампочка, которую включают в сеть.

Те условия и действия, при которых может осуществиться случайное событие, принято называть *случайным опытом*, или *случайным экспериментом.*

Иногда это действительно опыт, вроде бросания игральной кости или испытания электрической лампочки. А иногда слово опыт подходит меньше. Например, гроза в определенный летний день, без сомнения, случайное событие. Но кто же создает для него условия, кто проводит опыт? Видимо, природа.

В случайном опыте не все события такие, что их появление (или не появление) нельзя предсказать. Например, в опыте с электрической лампочкой можно говорить о событии «лампочка в конце концов перегорит». Об этом событии мы твердо знаем, что оно произойдет, потому что вечных электрических лампочек не бывает. Это событие достоверное. Напротив, событие «лампочка никогда не перегорит» – это событие невозможное.

Чтобы не делать постоянных оговорок о достоверных или невозможных событиях, любые события, о которых можно говорить в связи со случайным опытом, принято называть случайными.

Здесь сказано о том, что случайные события происходят не сами по себе, а только при проведении случайного опыта.

Вопросы

1. Вызовут ли вас завтра к доске? Является ли это событие случайным? Может ли оно осуществиться, если вы заболели, и завтра не пойдете в школу?

2. Может ли машина, стоящая в гараже, попасть в автомобильную аварию?

3. Можно ли выиграть в лотерею, ни разу не купив лотерейного билета? Что в этой ситуации является случайным событием, а что случайным опытом?

4. «Я написал изложение и не сделал ни одной ошибки». Что здесь является случайным опытом, а что — случайным событием?

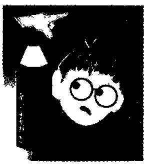
26. Элементарные события

В результате случайного опыта могут произойти различные случайные события. Например, в результате бросания игральной кости может выпасть четверка, может выпасть четное число очков, может выпасть число, меньшее 5. Заметим, что событие «выпало четное число очков» можно разбить на три события: «выпало два очка», «выпало четыре очка», «выпало шесть очков». А событие «выпала четверка» на более простые события не разделяется.

События, которые нельзя разделить на более простые, называются *элементарными событиями*.

Оказывается, в каждом опыте можно выделить такие элементарные события, из которых состоят все остальные события.

В результате случайного опыта обязательно наступает только одно элементарное событие.



Пример 1. При подбрасывании игральной кости элементарных событий шесть: «выпало одно очко», «выпало два очка» и т. д., вплоть до «выпало шесть очков».

В более сложных опытах элементарных событий больше.

Пример 2. Рассмотрим, например, элементарные события при двукратном бросании игральной кости. Здесь элементарных событий $6 \cdot 6 = 36$, ибо к каждому из шести возможных элементарных событий при первом броске может присоединиться любое из шести событий при втором броске. Все эти 36 элементарных событий удобно записать в виде таблицы.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

26. Элементарные события

В каждой ячейке таблицы первым указано число очков, выпавших при первом броске. Второе число — число очков, выпавших при втором броске кости.

Таким образом, **элементарным событием при двух бросаниях игральной кости является пара чисел**.

В этом пункте сказано о том, что такое элементарное событие, и о том, что случайный опыт может закончиться только одним элементарным событием.

Вопросы

1. В классе 25 учеников. Учитель во время урока вызывает к доске одного ученика. Сколько различных элементарных событий имеет этот случайный опыт?

2. Могут ли в результате опыта одновременно наступить два различных элементарных события?

Упражнения

1. Андрей и Борис решили купить мороженое и встали в очередь. Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите эти способы.

2. В киоске продается три сорта мороженого: сливочное, шоколадное и клубничное. Андрей и Борис покупают по одной порции мороженого. Выпишите в виде таблицы элементарные события этого опыта. Сколько всего получилось элементарных событий? Начало таблицы показано на рис. 1.

Андрей	Борис
сливочное	сливочное
....	

Рис. 1

3. Андрей, Борис и Владимир решили купить мороженое и встали в очередь за покупкой. Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите все эти способы.

4. В ящике четыре детали: две исправные детали a и b и две бракованные детали c и d. Из ящика наугад извлекают по одной детали, пока не обнаружат все бракованные. Элементарные события этого опыта будем записывать в виде последовательности букв. Например, $abcd$, cad и т. д.

а) Является ли $cdab$ элементарным событием в этом опыте?

б) Какими буквами может заканчиваться запись элементарного события?

в) Выпишите все элементарные события этого опыта.

г) Сколько различных элементарных событий записывается тремя буквами?

5. Игральную кость подбрасывают дважды. Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий этого эксперимента. Выделите в таблице элементарные события, при которых в сумме выпало:

а) менее 4 очков; б) ровно 7 очков; в) ровно 11 очков; г) четное число очков.

6. При подбрасывании монеты будем обозначать буквой О выпадение орла и буквой Р выпадение решки.

а) Подбросим монету два раза. Появление двух орлов записывается как ОО. Это одно из элементарных событий этого опыта. Выпишите все элементарные события этого опыта.

б) Подбросим монету три раза. Выпишите все элементарные события этого опыта.

в) Во сколько раз больше число элементарных событий при трех бросаниях монеты, чем при двух бросаниях монеты?

г)* Сколько элементарных событий при четырех бросаниях монеты?

д)* Сколько элементарных событий при десяти бросаниях монеты?

7. Из закрепленного ружья стреляют по мишени, изображенной на рис. 2. Выстрелить мимо мишени невозможно. Элементарным событием при одном выстреле будет выбивание определенного числа очков. Сколько элементарных событий в этом опыте:

а) при двух выстрелах; б) при трех выстрелах?

8. Спортивная команда «Математик» проводит товарищескую встречу по волейболу с командой «Физик». Ничья невозможна. Встреча проводится до двух побед одной из команд. Победу «Математика» обозначим буквой М, а победу «Физика» — буквой Ф. Одним из элементарных событий является ММ.

а) Запишите все возможные элементарные события.

б) Запишите все элементарные события, при которых встречу выигрывает команда «Физик».

в) Предположим, что во встрече победила команда «Математик». Какой буквой оканчивается запись соответствующих элементарных событий?

г) Какое наибольшее количество матчей может состояться?

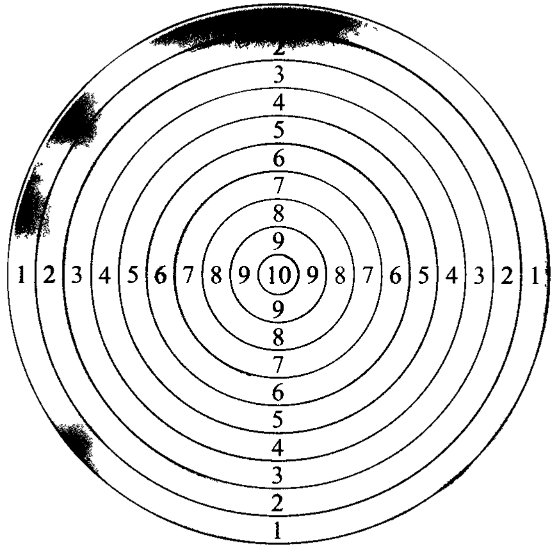


Рис. 2

9. Красная Шапочка идет от домика мамы до домика бабушки. Красная Шапочка может идти только по дорожкам слева направо. Схема дорожек показана на рис. 3. Каждая дорожка обозначена буквой. Например, один из возможных путей записывается как *ax*, другой – как *bz*. Перечислите все возможные пути Красной Шапочки в домик бабушки. Сколько получилось таких путей?

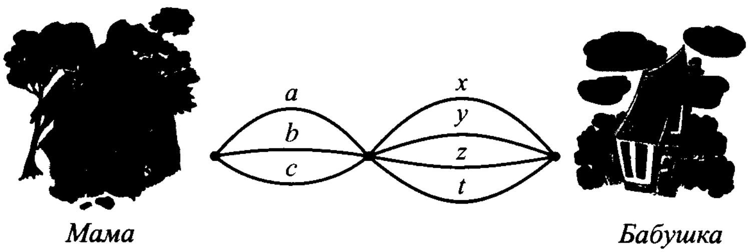


Рис. 3

10*. Ответьте на вопросы задачи 9 для схемы дорожек, изображенной на рис. 4.

Сколько элементарных событий в этом опыте записывается одной, двумя, тремя буквами?

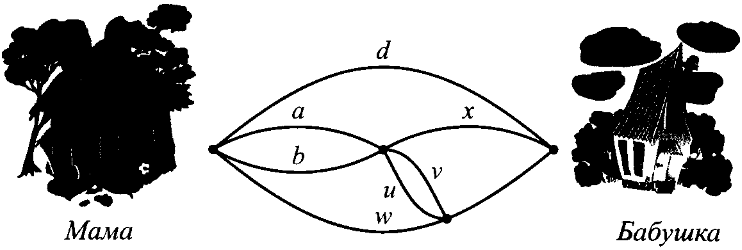


Рис. 4

11*. Игральную кость подбрасывают трижды. Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

12*. Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите число элементарных событий, при которых в сумме выпало:

а) 2 очка; б) 3 очка; в) 4 очка.

13*. Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите число элементарных событий, при которых в сумме выпало более:

а) 17 очков; б) 16 очков; в) 15 очков.

27. Равновозможные элементарные события

Элементарные события при одном бросании игральной кости нам известны: это 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Если кость правильная, то шансы этих элементарных событий одинаковы.

Элементарные события, шансы которых одинаковы, будем называть ***равновозможными***.

При бросании двух игральных костей элементарных событий уже 36, и они все тоже равновозможны.

Случайные опыты, в которых все элементарные события равновозможны, часто возникают при бросании костей, раздаче игральных карт, при розыгрыше лотереи и т. п.

В этом коротком пункте появилось новое важное понятие — понятие равновозможных событий.

Вопросы

1. Какие элементарные события называют равновозможными? Приведите примеры равновозможных событий.

Упражнения

1. Равновозможны ли элементарные события «орел» и «решка» при бросании правильной монеты?

2. Автомобиль подъезжает к перекрестку (рис. 5). Рассмотрим элементарные события: «автомобиль свернет вправо», «автомобиль свернет влево», «автомобиль поедет прямо», автомобиль развернется и поедет обратно». Как вы думаете, равновозможны ли они? Постарайтесь обосновать свое мнение.

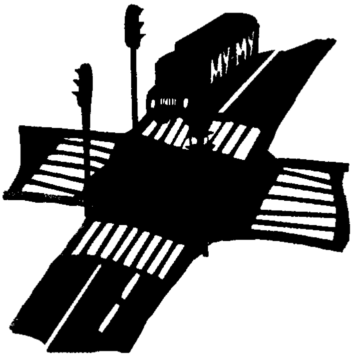


Рис. 5

3. Команда премьер-лиги, встречаясь в матче на кубок России по футболу с командой первой лиги, может либо победить, либо проиграть, либо встреча закончится вничью. Равновозможны ли эти элементарные события?

28. Вероятности элементарных событий

Каждое элементарное событие случайного опыта может осуществиться с некоторой вероятностью. У разных элементарных событий эти вероятности могут быть разными. В некоторых случаях вероятности элементарных событий можно рассчитать. В других случаях их приближенно можно найти из наблюдений. А в некоторых случайных опытах эти вероятности так и остаются неизвестными.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать случайные опыты, в которых все элементарные события равновозможны. Тогда их вероятности одинаковы. Если число этих элементарных событий равно N, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$.

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором три элементарных события. Обозначим их латинскими буквами a, b, c. Вероятности этих элементарных событий обозначим $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$, $\mathrm{P}(c)$. Каждая из этих вероятностей – это число от 0 до 1.

Вероятности элементарных событий обладают еще одним очень важным свойством. В каждом опыте сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1. В данном случае

$$\mathrm{P}(a)+\mathrm{P}(b)+\mathrm{P}(c)=1.$$

Сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

Это свойство вероятностей является отражением аналогичного свойства частот. Повторим опыт N раз. Пусть элементарное событие a произошло $N(a)$ раз, событие b произошло $N(b)$ раз, событие c произошло $N(c)$ раз. Ясно, что

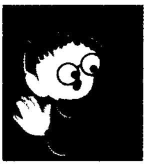
$$N(a)+N(b)+N(c)=N.$$

Поэтому сумма частот элементарных событий a, b и c равна 1:

$$\frac{N(a)}{N}+\frac{N(b)}{N}+\frac{N(c)}{N}=1.$$

Это свойство вероятностей и частот элементарных событий верно для любого случайного опыта, независимо от того, сколько он имеет элементарных событий.

Мы узнали, что сумма вероятностей элементарных событий равна единице и что такое же свойство верно для частот.



Вопросы

1. Могут ли вероятности элементарных событий быть равными?
2. Могут ли вероятности элементарных событий быть различными?
3. Чему равна сумма вероятностей всех элементарных событий случайного эксперимента?

Упражнения

1. Случайный опыт может закончиться одним из трех элементарных событий: a, b или c. Чему равна вероятность элементарного события c, если:

а) $\mathrm{P}(a)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(b)=\frac{1}{3}$; б) $\mathrm{P}(a)=0{,}4$, $\mathrm{P}(b)=0{,}2$;

в) $\mathrm{P}(a)=0{,}1$, $\mathrm{P}(b)=0{,}01$;

г)* $P(a) = p$, $P(b) = 0{,}8 - p$. Какие значения может принимать p?

2. Неправильная игральная кость такова, что вероятность выбросить грань, на которой 1 очко, равна $\frac{1}{4}$, вероятность выбросить грань с 2 очками равна $\frac{1}{12}$, с 3 очками — равна $\frac{1}{4}$, с 5 очками — равна $\frac{1}{12}$, а вероятность выбросить грань с 6 очками равна $\frac{1}{6}$. Найдите вероятность выбросить грань с 4 очками.

3. Все элементарные события случайного эксперимента равновозможны. Найдите вероятность каждого элементарного события, если их общее число равно:

а) 25; б) 17; в) 100.

4. Все элементарные события случайного опыта равновозможны. Сколько элементарных событий в этом опыте, если вероятность одного из них равна:

а) $\frac{1}{3}$; б) 0,1; в) 0,125; г) $\frac{1}{n}$.

5. В каждом из двух случайных опытов все элементарные события равновозможны. В каком из этих опытов вероятность элементарного события больше, если:

а) в первом опыте элементарных событий больше, чем во втором;

б) в первом опыте элементарных событий меньше, чем во втором;

в) в этих опытах элементарных событий поровну?

6. При подбрасывании монеты будем обозначать буквой О выпадение орла и буквой Р выпадение решки. Подбросим симметричную монету два раза. Равновозможны ли элементарные события ОО, РО, ОР и РР? Найдите их вероятности.

7. Симметричную монету подбрасывают несколько раз. Найдите вероятность элементарных событий при:

а) 3 бросаниях; б) 4 бросаниях;

в)* 10 бросаниях.

8. Три богатыря Илья Муромец, Алеша Попович и Добрыня Никитич ехали по дороге и увидели развилку, а на ней — придорожный камень с предупреждением:

Направо поедешь — коня потеряешь,
Налево поедешь — копье потеряешь,
Прямо поедешь — головы не снесешь.

Богатыри разделились, и каждый поехал своей дорогой. Придумайте систему обозначений для элементарных событий этого опыта, запишите все элементарные события. Считая их равновозможными, найдите вероятность каждого из них.

9. Случайный опыт состоит в том, что Красная Шапочка идет от домика мамы до домика бабушки. Красная Шапочка может идти только по дорожкам слева направо. Схема дорожек показана на рис. 6. Каждая дорожка обозначена буквой. Элементарным событием в этом опыте является выбранный путь. Например, *ax* или *bz*.

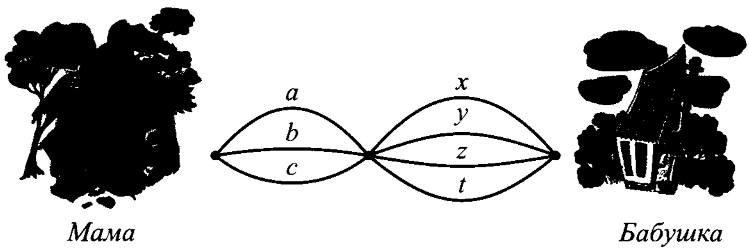


Рис. 6

Считая, что все элементарные события равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

10. Три первоклассника по очереди покупают воздушные шарики. Каждый из них покупает шарик одного из двух цветов: зеленого (З) или синего (С). Выпишите элементарные события этого эксперимента. Считая, что все они равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

11*. Три первоклассника по очереди покупают фломастеры. Каждый из них покупает фломастер одного из трех цветов: зеленого (З), синего (С) или красного (К). Сколько у этого опыта элементарных событий? Считая, что все элементарные события равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

12*. Игральную кость подбрасывают несколько раз. Равновозможны ли элементарные события такого опыта? Найдите вероятность каждого элементарного события при:

а) 3 бросаниях; б) 4 бросаниях.

29. Благоприятствующие элементарные события

До сих пор мы обсуждали только элементарные события. Однако в ходе опыта могут возникать более сложные случайные события. Например, при бросании игральной кости возможно событие «выпало четное число очков» или событие «выпало более двух очков». У таких событий тоже есть вероятности.

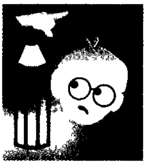
29. Благоприятствующие элементарные события

Для обозначения случайных событий будем употреблять прописные латинские буквы A, B, C, D и т. д.

Каждое событие состоит из элементарных событий. Например, событие «выпало четное число очков» при бросании игральной кости состоит из трех элементарных событий: «выпало два очка», «выпало четыре очка», «выпало шесть очков».

Определение. Элементарные события, при которых наступает событие A, называются **элементарными событиями, благоприятствующими событию** A.

Случайное событие может иметь несколько благоприятствующих элементарных событий. Два различных события могут произойти одновременно. Это не относится к элементарным событиям. Элементарное событие всегда наступает только одно.



Пример 1. Андрей, Борис и Владимир (А, Б и В) встают в очередь. Все возможные события в этом опыте складываются из элементарных событий, которых в данном случае всего шесть:

АБВ, АВБ, БВА, БАВ, ВАБ, ВБА.

Рассмотрим событие «В стоит первым». Оно наступает, если случилось одно из двух элементарных событий ВАБ и ВБА (рис. 7).

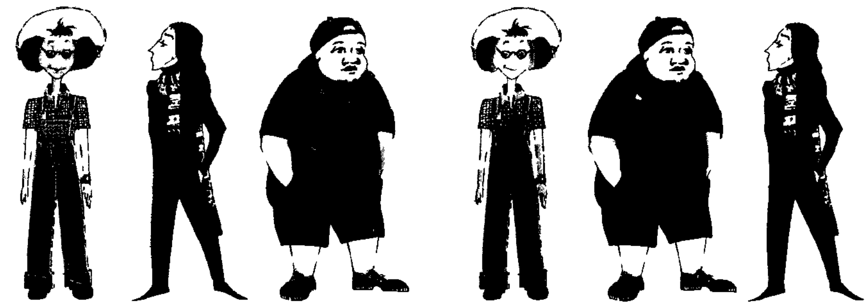


Рис. 7

Следовательно, событию «В стоит первым» благоприятствуют элементарные события ВАБ и ВБА.

Пример 2. В том же опыте событию «Б стоит впереди А» благоприятствуют элементарные события

БАВ, БВА, ВБА.

Пример 3. Игральную кость бросают дважды. Таблица элементарных событий этого опыта нам известна.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	**2; 6**
3; 1	3; 2	3; 3	**3; 4**	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	**4; 3**	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	**5; 6**
6; 1	**6; 2**	6; 3	6; 4	**6; 5**	6; 6

Рассмотрим событие «сумма очков при двух бросках равна 11». Этому событию благоприятствуют только два элементарных события (6; 5) и (5; 6). Эти элементарные события выделены в таблице розовым цветом.

Событию «произведение очков при двух бросках равна 12» благоприятствуют элементарные события (4; 3), (3; 4), (2; 6) и (6; 2). Они выделены голубым цветом.

Здесь мы узнали, что случайные события состоят из элементарных событий. Еще мы теперь знаем, что такое благоприятствующее элементарное событие.

Вопросы

1. Что означает, что элементарное событие благоприятствует событию A?
2. Всякое ли элементарное событие опыта является случайным событием?
3. Верно ли, что случайному событию может благоприятствовать только одно элементарное событие?

Упражнения

1. Бросают одну игральную кость. Перечислите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпало четное число очков»;

б) «выпало число очков, кратное 3»;

в) «выпало число очков, большее 2».

2. О результате шахматной встречи между шахматистами Андреевым и Борисовым известно, что Андреев не проиграл Борисову. Какие элементарные события благоприятствуют этому событию?

3. Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий при двух бросках игральной кости. Выделите в этой таблице цветными карандашами элементарные события, благоприятствующие событиям:

а) «выпало одинаковое число очков»;
б) «при каждом броске выпало число очков, кратное трем»;
в) «сумма очков в первом и втором бросках равна 5»;
г) «произведение выпавших очков равно 10»;
д) «при первом броске выпало число очков, кратное 4»;
е) «при втором броске выпало число очков, большее 4».

Сколько элементарных событий благоприятствует каждому из этих событий?

4. Пользуясь таблицей элементарных событий двух бросков игральной кости, укажите элементарные события, которые составляют события:

а) «сумма очков равна 7»;
б) «при втором броске выпало больше очков, чем при первом»;
в) «сумма очков не меньше 6»;
г) «произведение очков равно 18»;
д) «произведение очков не больше чем 6»;
е) «числа выпавших очков различаются меньше, чем на 3».

Сколько элементарных событий благоприятствует каждому из этих событий?

5. Биатлонист на огневом рубеже делает по одному выстрелу в каждую из пяти мишеней. Сколько элементарных событий благоприятствует событию:

а) «биатлонист попал ровно в четыре мишени»;
б) «биатлонист попал ровно в одну мишень»?

6. В ящике всего четыре детали: две исправные детали a и b и две бракованные детали c и d. Из этого ящика наугад извлекают по одной детали, пока не обнаружат все бракованные. Выпишите все элементарные события такого опыта, благоприятствующие событию:

а) «извлечена ровно одна исправная деталь»;
б) «извлечено ровно две детали»;
в) «извлечено ровно три детали»;
г) «извлечено больше двух деталей»;
д) «первая извлеченная деталь — исправная»;
е) «предпоследняя извлеченная деталь — бракованная».

7. Симметричную монету бросают дважды. Выпадение орла при каждом бросании обозначим через О, а выпадение решки — через Р. Выпишите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпал один орел и одна решка»;
б) «во второй раз выпала решка»;
в) «решка выпала хотя бы раз»;

г) «в первый раз выпал орел».

Сколько элементарных событий благоприятствует каждому из этих событий?

8. Симметричную монету бросают трижды. Выпадение орла при каждом бросании обозначим через О, а выпадение решки — через Р. Выпишите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпал ровно один орел»;

б) «выпала ровно одна решка»;

в) «при втором бросании выпала решка»;

г) «при третьем бросании выпал орел»;

д) «орел выпал более одного раза»;

е) «решка выпала хотя бы раз».

Сколько элементарных событий благоприятствует каждому из этих событий?

9. Константин, Леонид и Михаил купили по одной порции мороженого. Всего было куплено мороженое трех сортов: абрикосовое, брусничное и вишневое. Введите подходящую систему обозначений для элементарных событий такого эксперимента. Запишите все элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «Константин купил абрикосовое мороженое»;

б) «Леонид не купил брусничное мороженое»;

в) «Михаил купил либо абрикосовое, либо вишневое мороженое».

10. Володя дважды бросает игральную кость. Сколько элементарных событий благоприятствует тому, что произведение выпавших очков равно:

а) 2; б) 1; в) 12; г) 36; д) 10; е) 11; ж) 18 з) 4; и) 9?

11*. В классе 5 учеников, среди которых учится Петя. Учитель в течение урока по очереди вызывает к доске двух человек. Сколько элементарных событий благоприятствует событию «Петю вызвали к доске»?

12*. Три богатыря Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович подъехали к развилке. Здесь они разделились, один поехал направо, другой — налево, третий — прямо. Введите подходящую систему обозначений для элементарных событий этого опыта и выпишите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «Илья Муромец не поехал направо»;

б) «Добрыня Никитич поехал прямо»;

в) «Налево поехал либо Алеша Попович, либо Илья Муромец».

30. Вероятности событий

Вероятности элементарных событий мы договорились обозначать буквой P латинского алфавита по начальной букве латинского слова «probabilitas», что и означает вероятность.

Вероятность случайного события будем обозначать так же. Например, вероятность события A обозначаем $\mathrm{P}(A)$, вероятность события B — это $\mathrm{P}(B)$, и т. д.

Правило вычисления вероятностей. ***Вероятность события*** равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Запишем это правило вычисления вероятностей в виде формулы. Пусть событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c, d. Тогда его вероятность равна сумме вероятностей этих элементарных событий:

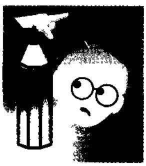
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}(b) + \mathrm{P}(c) + \mathrm{P}(d).$$

Нужно понимать, что число элементарных событий, благоприятствующих данному событию, и, значит, число слагаемых в правой части равенства может быть различным.

Вероятности всех элементарных событий неотрицательны и в сумме равны единице. Поэтому вероятность любого события A также неотрицательна и не превосходит 1:

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1.$$

Напомним также, что если $\mathrm{P}(A) = 0$, то событие называют невозможным, а если $\mathrm{P}(A) = 1$, то событие называется достоверным. Событие, которому благоприятствуют все элементарные события, является достоверным.



Пример 1. В шахматной партии, которую Остап Бендер играет с любителем шахмат города Васюки, вероятность выигрыша Остапа равна 0,001, вероятность ничьей равна 0,01. Найдем вероятность события A «Остап не проиграл». Этому событию благоприятствуют элементарные события «Остап выиграл» и «партия окончилась вничью». Таким образом,

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}001 + 0{,}01 = 0{,}011.$$

Пример 2. Автомобиль подъезжает к перекрестку (рис. 8). Вероятность элементарного события «автомобиль свернет вправо» равна 0,5, вероятность элементарного события «автомобиль свернет влево» равна 0,3, вероятность элементарного события «автомобиль поедет прямо» равна 0,18. Нужно найти вероятность события A «автомобиль не поедет обратно». Очевидно, этому событию благоприятствуют три перечисленных элементарных события. Следовательно,

$$P(A) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}98.$$

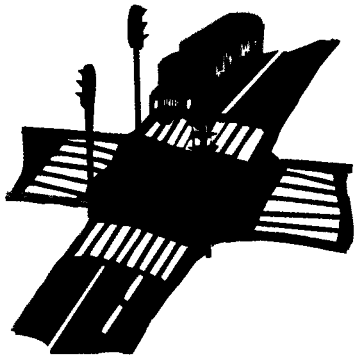
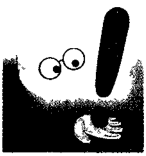


Рис. 8



Определение. События, которые имеют одинаковые вероятности, называются ***равновероятными***. В частности, **равновозможные элементарные события являются равновероятными событиями.**

Теперь мы знаем, что вероятность случайного события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих ему. Еще мы познакомились с равновероятными событиями.

Вопросы

1. Бросают одну игральную кость. Событие A заключается в том, что выпало целое число очков. Является ли событие A достоверным? Чему равна вероятность события A?

2. Приведите пример достоверного события в случайном эксперименте с бросанием двух игральных костей.

3. Приведите пример события, вероятность которого равна нулю, в случайном эксперименте с двумя бросками игральной кости. Вспомните, как называется такое событие.

4. Сформулируйте правило вычисления вероятности события через вероятности благоприятствующих элементарных событий.

Упражнения

1. В случайном опыте четыре элементарных события a, b, c и d, вероятности которых соответственно равны 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2. Найдите вероятность события, которому благоприятствуют элементарные события:

а) a и c; б) a, b и d; в) b, d и c; г) a и d.

2. В шахматной партии Андрей играет с Борисом. Вероятность выигрыша Андрея равна 0,3, вероятность ничьей равна 0,2, вероятность того, что партия не будет закончена, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:

а) Андрей не проиграет; б) Борис не проиграет; в) никто не выиграет.

3. Стрелок один раз стреляет в круглую мишень (рис. 9). При этом вероятности попадания в зоны мишени представлены в таблице:

Зона мишени	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вероятность	0	0,001	0,004	0,006	0,021	0,065	0,14	0,243	0,334	0,186

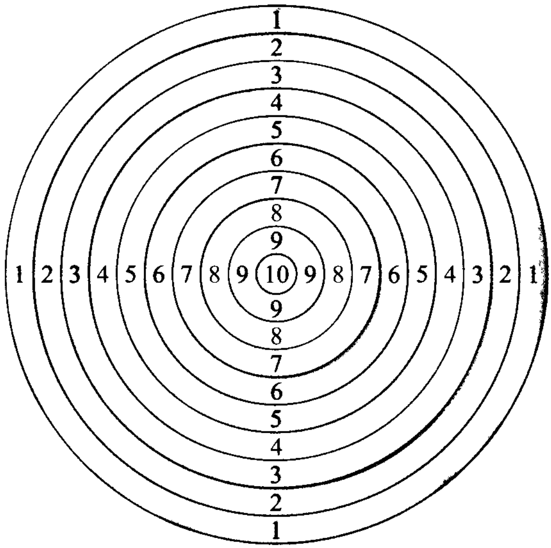


Рис. 9

Найдите вероятность события:

а) «стрелок выбил меньше 5 очков»;

б) «стрелок выбил больше 7 очков»;

в) «стрелок попал в желтую зону мишени»;

г) «стрелок попал в зеленую зону мишени»;

д) «стрелок не попал в голубую зону мишени»;

е) «стрелок попал в красную зону и при этом выбил больше 3 очков».

4. В некотором опыте возможно три элементарных события a, b и c. Вероятность того, что наступит либо b, либо c, равна 0,83. Найдите вероятность элементарного события a.

5*. В некотором опыте возможно три элементарных события a, b и c. Вероятность того, что наступит либо a, либо b, равна 0,4, вероятность того, что наступит либо a, либо c, равна 0,7. Найдите вероятность каждого из элементарных событий.

6*. Иван Иванович отправился охотиться на медведей и зайцев и оценивает свои перспективы следующим образом:

— Один шанс из четырех за то, что попадется только заяц; один к десяти за то, что подстрелю только медведя; один к сорока — что будет и медведь, и заяц.

Найдите вероятность того, что не видать Ивану Ивановичу в качестве охотничьего трофея:

а) ни одного зайца; б) ни одного медведя; в) ни медведя, ни зайца.

31. Опыты с равновозможными элементарными событиями

Напомним, что элементарные события случайного опыта называются ***равновозможными***, если все они имеют одинаковые шансы на осуществление. Тогда эти элементарные события имеют равные вероятности. Пусть в некотором опыте все элементарные события равновозможны и их число равно N. Поскольку вероятности этих элементарных событий одинаковы и в сумме равны 1, вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{N}$.

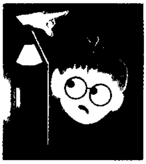
В этом случае подсчет вероятностей событий упрощается. Пусть случайному событию A благоприятствуют $N(A)$ элементарных событий.

Тогда

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Это правило можно выразить словами.

31. Опыты с равновозможными элементарными событиями



Пусть все элементарные события опыта равновозможны. Тогда в этом опыте вероятность произвольного события равна **отношению числа элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных событий.**

Пример 1. Игральную кость бросают два раза. Найдем вероятность события A «сумма очков меньше 6». Для этого воспользуемся таблицей элементарных событий этого эксперимента.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Благоприятствующие элементарные события выделим розовым цветом. Число благоприятствующих элементарных событий: $N(A) = 10$. Общее число элементарных событий: $N = 36$. Элементарные события равновозможны. Поэтому вероятность события A найдем по формуле

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

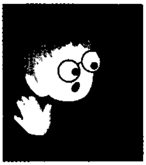
Пример 2. Дважды бросают симметричную монету. Найдем вероятность того, что оба раза выпала одна сторона.

Обозначим выпадение орла буквой О, а решки — буквой Р и выпишем все элементарные события:

ОО, ОР, РО и РР.

Всего элементарных событий четыре. Так как монета симметричная, эти события равновозможны. Из них ровно два события ОО и РР благоприятствуют указанному событию. Вероятность получить оба раза одну сторону равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Мы узнали, как найти вероятности событий в опыте, в котором элементарные события равновозможны.



Вопросы

1. Сформулируйте правило вычисления вероятности случайного события в опыте с равновозможными элементарными событиями.

Упражнения

1. Бросают одну игральную кость. Вычислите вероятность события:

а) «выпало четное число очков»;

б) «выпало число очков, кратное трем»;

в) «выпало число очков, большее 3»;

г) «выпало число очков, кратное 7».

2. Бросают одну игральную кость. Вычислите вероятность события:

а) «выпавшее число очков является делителем числа 12»;

б) «выпавшее число очков кратно 5»;

в) «выпавшее число очков является простым числом».

3. Бросают симметричную монету 2 раза. Равные ли вероятности имеют события «два раза выпал орел» и «один раз выпал орел, а другой — решка»? Найдите вероятности этих событий.

4. Бросают две игральных кости: желтую и зеленую. Вычислите вероятность события:

а) «сумма очков на обеих костях равна 7»;

б) «сумма очков на обеих костях равна 11»;

в) «на желтой кости выпало больше очков, чем на зеленой»;

г) «числа очков на костях различаются не больше чем на 2»;

д) «произведение очков на обеих костях равно 10»;

е) «сумма очков на обеих костях делится на 3».

5. Пятачок идет из своего дома к дому Винни-Пуха, а Винни-Пух идет из своего дома к дому Пятачка. Каждый из них может выбрать наугад любую из дорожек. Найдите вероятность встречи для каждого случая (рис. 10).

6. В коробке лежат 24 одинаковые авторучки. Из них 13 красных, 5 зеленых, остальные — синие. Продавец наудачу достает одну авторучку. Найдите вероятности событий:

а) «извлеченная ручка красная»;

б) «извлеченная ручка не зеленая»;

в) «извлеченная ручка либо синяя, либо зеленая»;

г) «извлеченная ручка либо красная, либо синяя».

7. В ящике лежат 20 синих и 16 красных карандашей. Продавец, не глядя, вынимает один карандаш. Найдите вероятность того, что этот карандаш

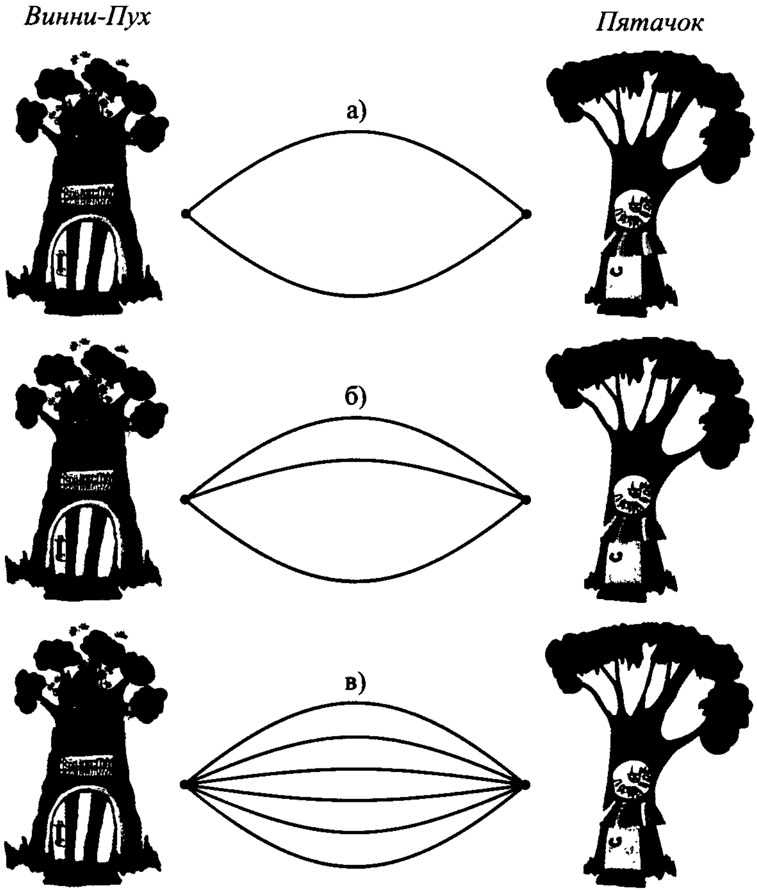


Рис. 10

окажется:

а) синим; б) красным.

8. Миша покупает альбом (А), блокнот (Б) и тетрадь (Т). Продавец достает товары в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что:

а) сначала продавец достаиет блокнот;

б) продавец достанет альбом в последнюю очередь;

в) продавец сначала достанет тетрадь, а последнюю очередь — блокнот;

г) альбом будет извлечен раньше, чем тетрадь.

9. На клавиатуре компьютера 105 клавиш. Найдите вероятность того, что обезьяна, нажав клавишу случайным образом, напечатает букву «*А*».

10. На день рожденья к Паше пришли две Маши и два Саши. Все пятеро расселись за круглым столом. Найдите вероятность того, что Паша сидит между двумя тезками.

11. Шахматный слон может за один ход перейти на любое число полей, двигаясь только по диагонали (рис. 11). Шахматный слон случайным образом поставлен на доску. Найдите вероятность того, что он может за один ход перейти на поле:

а) h1; б) a5; в) c4; г) d7; д) d5; е) g3.

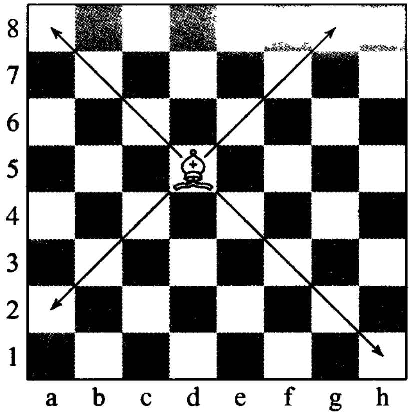


Рис. 11

12. У Лены есть 4 книги писательницы Гонцовой: «Очки для крота», «Шило в мешке», «Квадратное колесо» и «Полосатый огурец». Оля не знает, какие книги есть у Лены, но решила подарить Лене еще одну или две книги Гонцовой. В магазине оказались книги «Шило в мешке», «Вагончик тронется», «Акула в аквариуме» и «Квадратное колесо». Найдите вероятность того, что у Лены окажется хотя бы две одинаковые книжки, если Оля выбрала случайным образом:

а) одну книжку; б) две разные книжки.

13. По правилам игры «Морской бой» на поле 10×10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трехпалубных и один четырехпалубный (рис. 12).

а) Найдите вероятность первым же выстрелом попасть в какой-нибудь из кораблей противника.

б) Найдите вероятность первым же выстрелом попасть в четырехпалубный корабль.

в) Найдите вероятность первым же выстрелом попасть в однопалубный корабль.

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Рис. 12

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1	•	•	•	•	•		•			
2	•		•	•	•	•	•	•	•	
3	•		•		•				•	•
4	•		•	•	•	•	•	•	•	
5	•		•				•	•	•	•
6	•	•	•	•	•	•	•	•		•
7	•		•	•	•		•	•		•
8	•	•	•	•				•	•	•
9	•			•	•		•	•	•	•
10	•	•	•	•		•	•	•		•

Рис. 13

14*. При игре в «Морской бой» после первого вашего выстрела противник сообщил, что вы подбили какой-то корабль (но не потопили его). Какова вероятность того, что вы попали:

а) в четырехпалубный корабль; б) в трехпалубный; в) в двухпалубный?

15*. На рис. 13 показано положение в игре «Морской бой». Красным цветом показаны потопленные корабли противника. У противника остался только один двухпалубный корабль, положение которого неизвестно. Клетки, в которых нарисованы точки, — это клетки, по которым мы уже стреляли. В них не может быть корабля. Считая равновозможными любые допустимые положения последнего корабля, найдите вероятность того, что вы попадете в него, выстрелив в поле:

а) к4; б) з1; в) к1; г) е7; д) е8.

В какое поле нужно выстрелить, чтобы вероятность подбить последний корабль была наибольшей?

16*. Надя складывала в коробочку только двухрублевые монеты. Однажды Ира взяла из коробочки несколько монет, заменив их монетами по одному рублю так, что общая денежная сумма осталась прежней. После замены вероятность наудачу вытащить двухрублевую монету оказалась в 3 раза больше вероятности вытащить рублевую. Какую часть двухрублевых монет взяла Ира?

17*. В городе N пять улиц. При этом две из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром два постовых случайным образом встали на два разных перекрестка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

18*. Одно время на улицах и вокзалах профессиональные игроки предлагали прохожим испытать удачу в простой игре. Зажав в кулаке обычный носовой платок так, что наружу высовывались только четыре уголка, игрок просил прохожего взять два любые конца и потянуть за них. Если прохожий вытаскивал два соседних угла, то он проигрывал. Если прохожий вытаскивал два противоположных угла, то он выигрывал. Найдите вероятность выигрыша прохожего и вероятность выигрыша игрока.

19*. Красная Шапочка идет от домика мамы к домику бабушки. Красная Шапочка может идти только по дорожкам слева направо. Схема дорожек показана на рисунке 14. Дорожки Красная Шапочка выбирает наудачу. На двух дорожках девочку поджидают Волки. Найдите вероятность того, что Красная Шапочка на своем пути:

а) встретит ровно одного Волка;

б) встретит двух Волков;

в) не встретит ни одного Волка;

г) встретит хотя бы одного Волка.

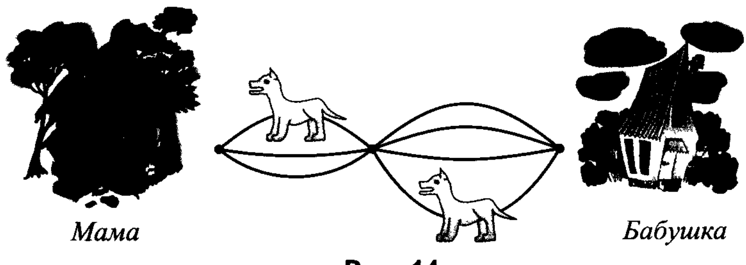


Рис. 14

Глава VII. Вероятности случайных событий. Сложение и умножение вероятностей

Мы обсуждаем случайные опыты. Напомним, что случайный опыт оканчивается каким-либо одним элементарным событием. Какое именно элементарное событие наступит в данном опыте — дело случая. Два разных элементарных события одновременно произойти не могут.

В случайных опытах мы можем рассматривать самые разные события, не только элементарные. ***Случайное событие*** или просто ***событие*** — это некоторое множество (набор, совокупность) элементарных событий.

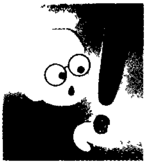
Можно сказать, что всякое случайное событие A состоит из элементарных событий. Эти элементарные события называют благоприятствующими случайному событию A.

Случайное событие A наступает, когда происходит какое-либо элементарное событие, благоприятствующее событию A. Если ни одно из благоприятствующих событий не произошло, то не произошло и событие A.

Случайные события можно различным способом сочетать друг с другом. При этом образуются новые случайные события. Мы обсудим три наиболее употребительных действия с событиями. К ним часто приходится обращаться при вычислении вероятностей.

32. Противоположное событие. Диаграммы Эйлера

Рассмотрим какое-либо событие A. Как и всякому событию, ему благоприятствуют некоторые элементарные события. Рассмотрим теперь все прочие элементарные события этого опыта, т. е. те, которые не благоприятствуют событию A. Соберем эти элементарные события вместе. Так мы получим новое событие. Оно состоит из тех элементарных событий, которые не благоприятствуют событию A. Это событие называется событием, ***противоположным*** событию A.



Событием, ***противоположным*** событию A, называют событие, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию A.

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Если событие B противоположно событию A, т. е. $B = \overline{A}$, то событие A противоположно событию B: $A = \overline{B}$. Поэтому события A и $\overline{A}$ называют ***взаимно противоположными*** или ***дополнениями*** друг для друга.

Пример 1. Бросают игральную кость. Рассмотрим событие A «выпало число, большее 4». Этому событию благоприятствуют элементарные события «выпала пятерка» и «выпала шестерка». Не благоприятствуют событию A следующие элементарные события: «выпала единица», «выпала двойка», «выпала тройка», «выпала четверка» (рис. 1). Для события A противоположным событием $\overline{A}$ является событие «выпало число, меньшее или равное четырем».

Событие A

Событие $\overline{A}$

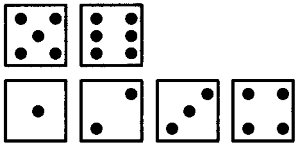


Рис. 1

Взаимно противоположные события одновременно произойти не могут, но какое-либо из них происходит обязательно. Поэтому

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A})=1.$$

Иными словами, сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна единице.

Следовательно,

$$\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A}).$$

Из этих формул следует, что для вычисления $\mathrm{P}(A)$ достаточно знать $\mathrm{P}(\overline{A})$. Это свойство во многих случаях оказывается полезным.

Пример 2. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей на них выпадет разное (не одинаковое) число очков?

Решение. Обозначим описанное событие A. Противоположным событием является событие $\overline{A}$, состоящее в том, что на обеих костях выпало одинаковое число очков. Событию $\overline{A}$ благоприятствуют шесть элементарных событий:

$$(1;\ 1),\ (2;\ 2),\ (3;\ 3),\ (4;\ 4),\ (5;\ 5),\ (6;\ 6).$$

Вероятность каждого из этих элементарных событий, как мы знаем, равна $\frac{1}{36}$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(\overline{A})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Тогда

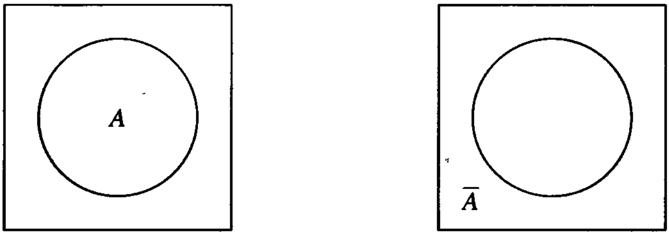
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

32. Противоположное событие. Диаграммы Эйлера

Соотношения и связи между событиями можно изобразить с помощью схематических рисунков. Такие рисунки называются **диаграммами Эйлера**.

Пусть прямоугольник изображает все элементарные события. Событие A изобразим в виде круга внутри прямоугольника. В этом случае оставшаяся часть прямоугольника изображает событие $\overline{A}$, противоположное событию A.

На рис. 2 с помощью диаграмм Эйлера изображены два события: событие A и противоположное событие $\overline{A}$.



Событие A — Событие $\overline{A}$, противоположное событию A

Рис. 2

Если нужно изобразить несколько событий, то рисуют несколько фигур — по одной для каждого события. При этом фигуры могут располагаться по-разному, показывая, как связаны между собой данные события.

В этом пункте говорилось о том, что такое противоположные события. Еще мы узнали о том, как можно изображать события с помощью диаграмм Эйлера.

Вопросы

1. Что такое противоположные события?
2. Обязательно ли события на диаграммах Эйлера изображаются кругами?
3. Опишите словами свойство вероятностей противоположных событий.

Упражнения

1. В случайном эксперименте 20 элементарных событий. Событию A благоприятствуют 12 из них. Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $\overline{A}$?

2. В некотором случайном опыте может произойти событие K. Найдите вероятность события $\overline{K}$, если вероятность события K равна:

а) 0,4; б) 0,85; в) 0,13; г) $\frac{1}{2}$; д) p. Какие значения может принимать p?

3. а) Докажите, что события A и B не могут быть противоположными, если $P(A) = 0{,}7$, а $P(B) = 0{,}44$.

б) вероятность события A равна 0,3, а вероятность события B равна 0,7. Обязательно ли события A и B взаимно противоположны?

4. Могут ли быть противоположными события C и D, если:

а) $P(C) = 0{,}12$; $P(D) = 0{,}78$; б) $P(C) = 0{,}14$; $P(D) = 0{,}86$;

в) $P(C) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $P(D) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

г) $P(C) = 0{,}5 + n$; $P(D) = 0{,}5 - n$, где $-0{,}5 \leqslant n \leqslant 0{,}5$;

д) $P(C) = 0{,}8 + m$; $P(D) = 0{,}8 - m$, где $-0{,}2 \leqslant m \leqslant 0{,}2$;

е)* $P(C) = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$; $P(D) = \frac{2ab}{(a+b)^2}$, где $a > 0$, $b > 0$.

5. Бросают одну игральную кость. Событие A состоит в том, что:

а) выпала шестерка;

б) выпало четное число очков;

в) выпало число очков, кратное трем.

Для каждого случая перечислите элементарные события, благоприятствующие событию $\overline{A}$, опишите событие $\overline{A}$ словами и найдите $P(\overline{A})$.

6. Бросают две игральные кости. Событие A состоит в том, что в сумме на них выпало:

а) 2 очка; б) 12 очков; в) менее 4 очков; г) более 10 очков.

Для каждого случая опишите событие $\overline{A}$ словами и найдите $P(\overline{A})$.

7. В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Из класса случайным образом выбирают одного ученика. Событие D — «выбрана девочка».

а) Сколько элементарных событий благоприятствуют событию D?

б) Чему равна вероятность события D?

в) Опишите словами событие $\overline{D}$.

г) Чему равна вероятность $P(\overline{D})$?

8. Симметричную монету бросили 4 раза. Орел при этом может выпасть 1, 2, 3 или 4 раза, а может не выпасть ни разу. Вероятности этих событий представлены в таблице:

Число выпадений орла	0	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Найдите вероятность события, противоположного событию:

а) «орел не выпал ни разу»;

б) «орел выпал более одного раза»;

в) «решка выпала менее трех раз»;

г) «орел выпал неизвестно сколько раз, но точно не 2 раза».

9*. Из класса выбирают двух учеников. Опишите словами событие $\overline{B}$, если событие B состоит в том, что:

а) оба выбранных ученика – мальчики;

б) выбраны ученики одного пола.

10*. В люстре пять новых лампочек. Событие A состоит в том, что в течение года:

а) перегорит хотя бы одна из них;

б) перегорит ровно две лампочки;

в) перегорит более трех лампочек;

г) перегорит меньше четырех лампочек.

Для каждого из этих событий опишите словами событие $\overline{A}$.

11*. На диаграмме Эйлера (рис. 3) изображены события A и B. Нарисуйте диаграмму в тетради и выделите на ней событие D, которое состоит в том, что:

а) событие A наступило, а B – нет;

б) событие B наступило, а A – нет;

в) наступило событие $\overline{A}$;

г) наступило событие $\overline{B}$.

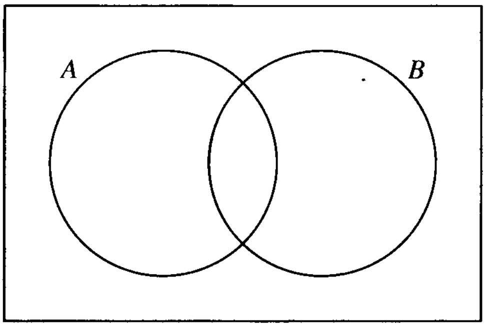


Рис. 3

33. Объединение событий

Пусть A и B — два события, относящиеся к одному случайному опыту. Рассмотрим те элементарные события, которые благоприятствуют событию A, и те элементарные события, которые благоприятствуют событию B. Все вместе эти элементарные события благоприятствуют новому событию. Это новое событие называют ***объединением событий*** A и B. Его обозначают $A \cup B$.

Событие $A \cup B$ наступает, если наступает хотя бы одно из событий A и B. Это означает, что наступает либо A, либо B, либо A и B вместе.

Пример 1. Продавщица выбирает два костюма, для того чтобы поместить их в витрину магазина. В ассортименте есть черные (Ч) и синие (С) костюмы. Элементарные события этого случайного опыта представляют собой пары костюмов, которые мы можем условно обозначить парами букв, указывающих цвета выбранных костюмов:

ЧС, ЧЧ, СС и СЧ.

Пусть, например, событие A состоит в том, что первый костюм черного цвета. Этому событию благоприятствуют элементарные события

ЧС и ЧЧ.

Событие B наступает, если второй костюм черного цвета; ему благоприятствуют элементарные события

СЧ и ЧЧ.

Объединению событий $A \cup B$ в этом случае благоприятствуют элементарные события, благоприятствующие хотя бы одному из двух событий A и B, т. е. элементарные события

ЧС, ЧЧ и СЧ.

Событие $A \cup B$ состоит в том, что хотя бы один из костюмов черного цвета. Формулировка объединения двух событий часто включает в себя слова «хотя бы».

Пример 2. Игральную кость бросают дважды. Событие A состоит в том, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Событие B состоит в том, что во второй раз выпало больше очков, чем в первый.

Тогда событие $A \cup B$ заключается в том, что либо в первый раз выпало больше, чем во второй, либо во второй раз больше, чем в первый. Иными словами,

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 1 Элементарные события, благоприятствующие событию A

3; 5 Элементарные события, благоприятствующие событию B

событие $A \cup B$ наступает, если при двух бросаниях кости выпали не равные числа очков. В известной нам таблице элементарных событий такого эксперимента событию $A \cup B$ благоприятствуют все элементарные события, кроме элементарных событий, стоящих на диагонали. На рисунке благоприятствующие элементарные события выделены.

На диаграмме Эйлера (рис. 4) показаны события A, B и их объединение $A \cup B$. Левый круг изображает событие A, правый круг — событие B, а выделенная фигура, включающая в себя оба круга, — это событие $A \cup B$.

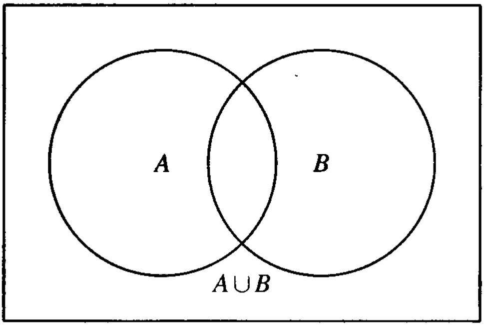


Рис. 4

Точно так же, добавив еще круги, можно изобразить объединение трех, четырех и более событий.

Мы узнали, что такое объединение событий и как объединение изображается на диаграмме Эйлера.

Вопросы

1. Что такое объединение событий?

2. Первое событие — «Миша ободрал левую коленку». Второе событие — «Миша ободрал правую коленку». Опишите словами объединение этих событий.

3. Событие B является объединением противоположных событий A и $\overline{A}$. Какова вероятность события B?

Упражнения

1. На диаграмме Эйлера (рис. 5) изображены события A и B. В кругах, изображающих эти события, написано число благоприятствующих каждому событию элементарных событий. Сделайте рисунок в тетради и заштрихуйте событие $A \cup B$. Сколько элементарных событий благоприятствуют этому событию?

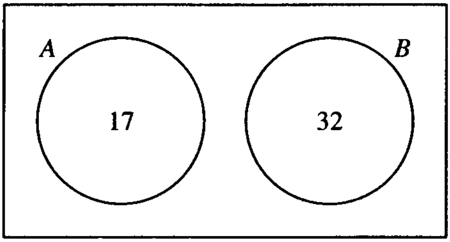


Рис. 5

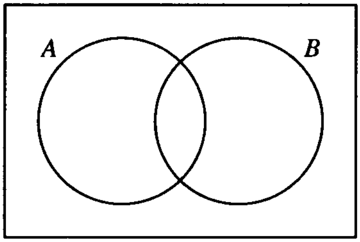


Рис. 6

2. Событию U в ходе некоторого опыта благоприятствуют 5 элементарных событий. Событию V благоприятствуют 8 элементарных событий. Из этих 8 элементарных событий ни одно не благоприятствует событию U. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $U \cup V$?

3. Событию A благоприятствуют 6 элементарных событий, а событию B — 8 элементарных событий. Из этих 8 элементарных событий 4 благоприятствуют сразу двум событиям. Нарисуйте диаграмму Эйлера и ответьте на вопросы.

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A, но не благоприятствует событию B?

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию B, но не благоприятствует событию A?

в) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $A \cup B$?

4. Монету бросают дважды. Событие A — «первый раз выпал орел». Событие B — «второй раз выпал орел». Выпишите элементарные события, благоприятствующие каждому из этих событий и событию $A \cup B$.

5. Монету бросают дважды. Представьте в виде объединения двух событий событие:

а) «хотя бы один раз выпала решка»;

б) «оба раза выпала одна и та же сторона монеты».

6. На диаграмме Эйлера (рис. 6) изображены события A и B. Нарисуйте диаграмму в тетради и укажите на ней событие C, которое состоит в том, что:

а) событие A наступило, а B — нет;

б) событие B наступило, а A — нет;

в) наступило хотя бы одно из событий A и B;

г) не наступило ни одно из событий A и B;

д) наступили оба события.

Какое из событий пунктов а)–д) является событием $A \cup B$? Какое из событий пунктов а)–д) является событием $\overline{A \cup B}$?

7. Бросают одну игральную кость. Событие A — «выпало четное число очков». Событие B состоит в том, что:

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало нечетное число очков;

в) выпало число очков, кратное 4;

г) выпало число очков, кратное 5.

Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$. Найдите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

8. На диаграмме Эйлера (рис. 7) изображены события A и B. В кругах, изображающих эти события, написано число благоприятствующих каждому событию элементарных событий. Всего в опыте 60 различных элементарных событий.

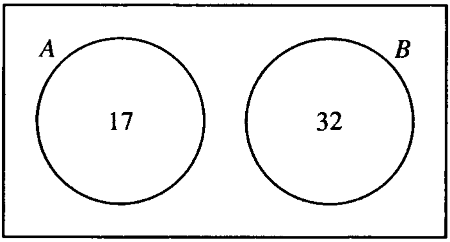


Рис. 7

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{B}$?

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A}$?

в)* Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A \cup B}$?

г)* Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A} \cup \overline{B}$?

9. Бросают две игральные кости. Событие A — «на первой кости выпала 1». Событие B — «на второй кости выпала 1».

а) Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$.

б) Есть ли у событий A и B общие благоприятствующие элементарные события? Если да, то сколько их?

в) Опишите словами событие $A \cup B$.

г) Найдите вероятность события $A \cup B$.

10. Бросают две игральные кости. Событие U — «на первой кости выпало число очков, кратное 3». Событие V — «на второй кости выпало число очков, кратное 3».

а) Выделите цветом элементарные события, благоприятствующие событию U и V, в таблице элементарных событий;

б) Есть ли у событий U и V общие благоприятствующие элементарные события? Если да, то сколько их?

в) Опишите словами событие $U \cup V$.

г) Найдите вероятность события $U \cup V$.

11. Бросают две игральные кости. Событие K — «на первой кости выпало четное число очков». Событие L — «на второй кости выпало четное число очков».

а) Выделите в таблице элементарных событий этого опыта элементарные события, благоприятствующие событиям K и L.

б) Есть ли у событий K и L общие элементарные события? Если да, то какие они и сколько их?

в) Опишите словами событие $K \cup L$.

г) Найдите вероятность события $K \cup L$.

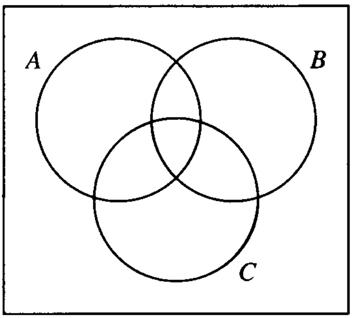


Рис. 8

12*. Докажите, что для любых событий A и B верно, что $P(A \cup B) \geqslant P(A)$ и $P(A \cup B) \geqslant P(B)$.

13*. На диаграмме Эйлера на рис. 8 показаны события A, B и C. Нарисуйте диаграммы, изображающие событие:

а) $A \cup \overline{B}$; б) $\overline{A} \cup C$; в) $\overline{A \cup B}$; г) $A \cup B \cup C$; д) $\overline{A} \cup B \cup C$; е) $A \cup \overline{B \cup C}$; ж) $\overline{A \cup B \cup C}$; з) $\overline{A} \cup B \cup \overline{C}$.

34. Пересечение событий

Возьмем два события A и B. Предположим, что есть элементарные события, благоприятствующие и событию A, и событию B. Взяв все элементарные события, которые благоприятствуют и событию A, и событию B, мы получим новое событие. Это новое событие называют ***пересечением событий*** A и B. Его обозначают $A \cap B$.

Событие $A \cap B$ наступает, если наступают оба события A и B.

Если события A и B не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в ходе одного и того же опыта. Такие события называют ***несовместными***, а их пересечение — ***пустое событие***. Оно обозначается символом $\varnothing$. Можно написать $A \cap B = \varnothing$.

Вероятность пересечения несовместных событий равна 0: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Пример 1. Вернемся к продавщице, выбирающей два костюма для витрины. Напомним все элементарные события этого опыта:

ЧС, ЧЧ, СС и СЧ.

Пусть событие A, как и прежде, состоит в том, что первый костюм черного цвета. Этому событию благоприятствуют элементарные события

ЧС и ЧЧ.

Событие B «второй костюм черного цвета» наступает при элементарных событиях

СЧ и ЧЧ.

Пересечению событий $A \cap B$ благоприятствует единственное элементарное событие ЧЧ.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что оба костюма черного цвета.

Пример 2. События «8 марта приходится на пятницу» и «8 марта приходится на субботу» являются несовместными в одном и том же году.

Пример 3. Бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало меньше 3 очков. Событие B — на второй кости выпало меньше 3 очков.

Тогда событие $A \cap B$ заключается в том, что на каждой кости выпало меньше 3 очков (таблица элементарных событий приведена на следующей странице).

Событие $A \cap B$ можно изобразить на диаграмме Эйлера. Чтобы изобразить это событие, нужно заштриховать общую часть фигур, изображающих события A и B (рис. 9).

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 3	Элементарные события, благоприятствующие событию A
3; 2	Элементарные события, благоприятствующие событию B
2; 1	Элементарные события, благоприятствующие обоим событиям

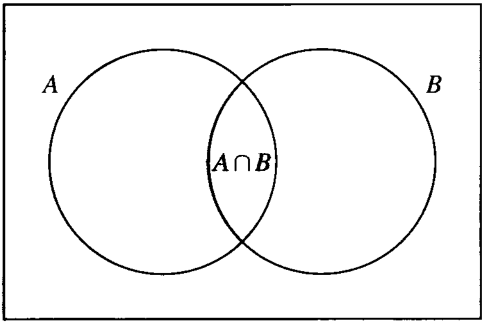


Рис. 9

Добавив еще круги, можно заштриховать фигуру, изображающую пересечение трех или более событий.

Этот пункт посвящен рассказу о том, что такое пересечение событий и как его изобразить на диаграмме Эйлера.

Вопросы

1. Что такое пересечение событий?
2. Первое событие — «Миша ободрал левую коленку». Второе событие — «Миша ободрал правую коленку». Опишите словами пересечение этих событий.
3. Какие события называются несовместными?

Упражнения

1. Бросают одну игральную кость. Событие A — «выпало четное число очков». Событие B заключается в том, что:

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало число очков, кратное 4;

в) выпало число очков, большее 4;

г) выпало число очков, меньшее 3.

Для каждого случая выпишите элементарные события, составляющие событие $A \cap B$, и найдите $P(A \cap B)$.

2. Бросают две игральные кости. Событие A — «на первой кости выпало меньше 3 очков». Событие B — «на второй кости выпало больше 4 очков».

а) Пользуясь таблицей элементарных событий этого опыта, выделите цветом все элементарные события, благоприятствующие событиям A, B и $A \cap B$.

б) Опишите словами событие $A \cap B$. в) Найдите $P(A \cap B)$.

3. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Событие D — «первый выбранный ученик — девочка». Событие C — «второй выбранный ученик — девочка». Опишите словами события $D \cup C$ и $D \cap C$.

4. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Событие A — «первый выбранный ученик — девочка». Событие B — «среди выбранных учеников есть только одна девочка». Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

5. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Событие A — «первый выбранный ученик — девочка». Событие C — «второй выбранный ученик — мальчик». Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

6. Событие C — «по дороге из школы домой вам встретится черная кошка». Событие D — «по дороге из школы домой вам встретится злая собака». Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

7. Событие M — «вас завтра вызовут к доске на уроке математики». Событие G — «вас завтра вызовут к доске на уроке географии». Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

8. В ходе некоторого опыта событию A благоприятствуют 6 элементарных событий, событию B — 8 элементарных событий. При этом 2 элементарных события благоприятствуют событию $A \cap B$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию:

а) «событие A наступает, а B — нет»; б) «событие B наступает, а A — нет».

Нарисуйте диаграмму Эйлера, на которой в каждой из образовавшихся фигур укажите число элементарных событий, благоприятствующих соответствующему событию.

Пользуясь рисунком, ответьте на вопрос: сколько элементарных событий благоприятствует событию $A \cup B$?

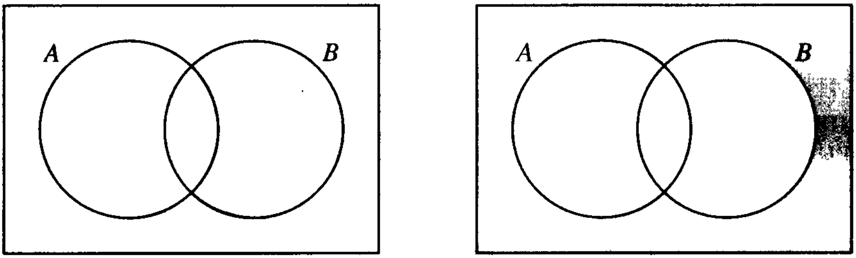
9. В ходе некоторого опыта событию A благоприятствуют 6 элементарных событий, событию B — 8 элементарных событий. 10 элементарных событий благоприятствуют событию $A \cup B$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию:

а) «событие A наступает, а B — нет»; б) «событие B наступает, а A — нет»;

Нарисуйте диаграмму Эйлера, на которой в каждой из образовавшихся фигур укажите число элементарных событий, благоприятствующих соответствующему событию.

Пользуясь рисунком, ответьте на вопрос: сколько элементарных событий благоприятствует событию $A \cap B$?

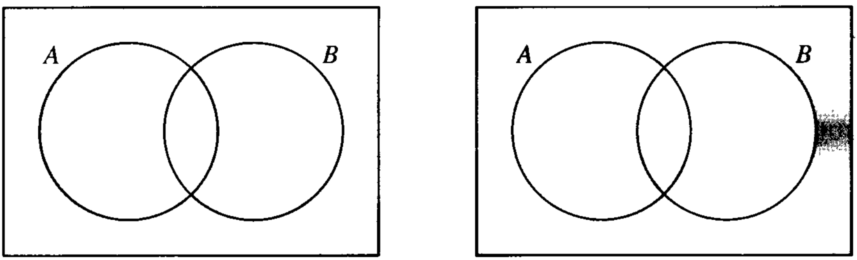
10. Запишите формулой событие, изображенное на диаграмме Эйлера (рис. 10).



а) б)

Рис. 10

11. Запишите формулой событие, изображенное на диаграмме Эйлера (рис. 11).



а) б)

Рис. 11

12. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:
а) $A\cap\overline{B}$; б) $\overline{A}\cap\overline{B}$; в) $\overline{A}\cap B$; г) $\overline{A\cap B}$.
13. Докажите, что $\mathrm{P}(A\cap B)\leqslant\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(A\cap B)\leqslant\mathrm{P}(B)$.
14*. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:
а) $A\cap B\cap C$; б) $A\cap\overline{B}\cap C$; в) $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$; г) $A\cap\overline{B\cap C}$; д) $\overline{A\cap B\cap C}$.
15*. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:
а) $A\cap(B\cup C)$; б) $A\cup(B\cap C)$; в) $\overline{A}\cap(B\cup C)$; г) $A\cap(\overline{B}\cup C)$; д) $A\cap\overline{(B\cup C)}$;
е) $A\cup(\overline{B}\cap C)$; ж) $\overline{A}\cup(B\cap\overline{C})$; з) $A\cup\overline{(B\cap C)}$; и) $\overline{A\cup(\overline{B}\cap C)}$.
16*. С помощью диаграмм Эйлера докажите равенство:
а) $(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$;
б) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; в) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
г) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; д) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

35. Несовместные события. Правило сложения вероятностей

Мы знаем, что если события A и B не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в ходе одного и того же опыта. Такие события мы назвали несовместными. Напомним, что в этом случае говорят, что вероятность одновременного наступления событий A и B равна 0, и пишут $\mathrm{P}(A\cap B)=0$.

Пример. Игральную кость бросают дважды. Событие A состоит в том, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Событие B состоит в том, что во второй раз выпало больше очков, чем в первый. Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие каждому из этих событий.

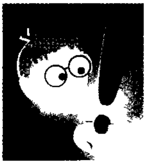
1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 1 — Элементарные события, благоприятствующие событию A

3; 5 — Элементарные события, благоприятствующие событию B

Общих элементарных событий у событий A и B нет. Это легко объяснимо: не может случиться так, что в первый раз выпало больше, чем во второй, и в то же время во второй раз выпало больше, чем в первый. События A и B в этом опыте несовместны.

Важным свойством несовместных событий является то, что для них справедливо ***правило сложения вероятностей***.



Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

В частности, возвращаясь к примеру с костями, видим, что

$$P(A) = P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Тогда вероятность события $A \cup B$ равна

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}.$$

Подчеркнем, что **формула** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **верна только для несовместных событий.**

Несовместные события изображаются на диаграмме Эйлера с помощью двух непересекающихся фигур (рис. 12).

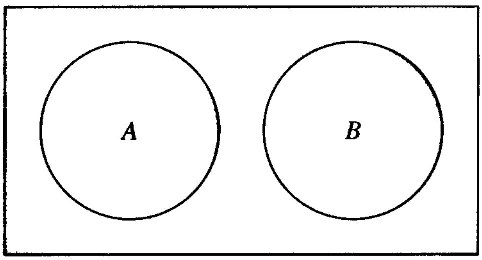


Рис. 12

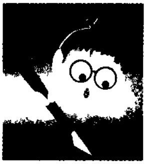
Здесь сказано, что несовместные события — это те события, которые не могут наступить в одном и том же опыте. Кроме того, теперь мы знаем формулу вероятности объединения несовместных событий.

35. Несовместные события. Правило сложения вероятностей

Вопросы

1. Опишите словами правило сложения вероятностей для несовместных событий. Запишите формулу сложения вероятностей двух несовместных событий.

2. Как несовместные события изображаются на диаграммах Эйлера?



Упражнения

1. Бросают одну игральную кость. Событие A — «выпало четное число очков». Событие B — «выпало число очков, кратное пяти».

а) Являются ли события A и B несовместными?

б) Используя правило сложения вероятностей, вычислите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

2. Бросают одну игральную кость. Событие A — «выпало четное число очков». Событие B — «выпало число очков, меньшее 4».

а) Являются ли события A и B несовместными?

б) Опишите словами событие $A \cup B$.

в) Вычислите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

3. События U и V несовместны. Найдите вероятность их объединения, если:

а) $\mathrm{P}(U) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}4$; б) $\mathrm{P}(U) = 0{,}5$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}2$;

в) $\mathrm{P}(U) = 1 - \alpha$, $\mathrm{P}(V) = 1 - \beta$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$;

г) $\mathrm{P}(U) = a^2 + ab + b^2$, $\mathrm{P}(V) = ab$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b \leqslant 1$.

4. Могут ли события A и B быть несовместными, если:

а) $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$; б) $\mathrm{P}(A) = 0{,}1$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; в) $\mathrm{P}(A) = a$, $\mathrm{P}(B) = 2 - a$;

г) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$?

5*. Являются ли события C и D противоположными, если они несовместны и:

а) $\mathrm{P}(C) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(D) = 0{,}3$; б) $\mathrm{P}(C \cup D) = 0{,}75$; в) $\mathrm{P}(C) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(D) = 0{,}8$;

г) $\mathrm{P}(C) = \frac{a^2 + 1}{2(a+1)^2}$, $\mathrm{P}(D) = \frac{a}{(a+1)^2}$, где $a \geqslant 0$?

6. События A и B несовместны. Докажите, что $B = \overline{A}$, если:

а) $\mathrm{P}(A) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$; б) $\mathrm{P}(A) = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{2ab}{(a+b)^2}$;

в) $\mathrm{P}(A) = \frac{2pq}{(p-q)^2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{p^2 - 4pq + q^2}{(p-q)^2}$.

7*. Пользуясь диаграммой Эйлера, докажите, что несовместны события:

а) A и $\overline{A} \cap B$; б) $\overline{A} \cap \overline{B}$ и $A \cap \overline{B}$.

8*. Пользуясь диаграммой Эйлера, докажите, что несовместны события $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ и $A \cap B$.

9*. Пользуясь результатами заданий 7 и 8, докажите, что:

а) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$;

б) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B)$.

36. Формула сложения вероятностей

Если события A и B не являются несовместными, т. е. могут оба наступить в результате опыта, то к ним нельзя применить формулу $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Пример. Бросают две правильные игральные кости. Событие A — «на первой кости выпало меньше 3 очков». Событие B — «на второй кости выпало меньше 3 очков».

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 3 — Элементарные события, благоприятствующие событию A

3; 2 — Элементарные события, благоприятствующие событию B

2; 1 — Элементарные события, благоприятствующие обоим событиям

Событию A благоприятствуют 12 элементарных событий. Событию B тоже благоприятствуют 12 элементарных событий. Событию $A \cup B$ благоприятствуют 20 элементарных событий.

Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{12}{36}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{12}{36}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{20}{36}$$

и, очевидно,

$$\mathrm{P}(A \cup B) \neq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Получается, что формулу $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ для этих событий применять нельзя. Как быть в этом случае?

36. Формула сложения вероятностей

Воспользуемся диаграммой Эйлера и изобразим два события A и B, у которых есть общие благоприятствующие элементарные события (рис. 13). Такие события не являются несовместными.

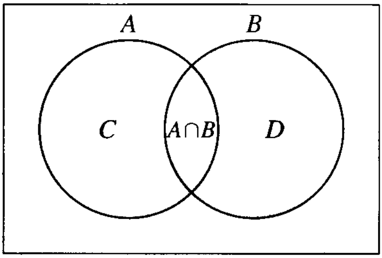


Рис. 13

Рассмотрим такие события: событие C — «наступило A, но не наступило B» и событие D — «наступило B, но не наступило A». На диаграмме видно, что события C и $A \cap B$ несовместны, поскольку соответствующие фигуры не имеют общих точек. Вместе эти события образуют событие A. Поэтому по правилу сложения вероятностей для несовместных событий находим:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(A \cap B).$$

Точно так же получаем $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \cap B)$.

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B).$$

События C, D и $A \cap B$ несовместны и образуют событие $A \cup B$. Получаем формулу

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cap B),$$

откуда

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Выведенная формула справедлива для любых событий.

Вероятность объединения двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность пересечения.

В этом пункте мы вывели формулу, с помощью которой можно найти вероятность объединения двух любых событий, не обязательно несовместных.

Вопросы

1. Опишите словами правило сложения вероятностей для произвольных событий и напишите формулу.

2. Справедлива ли формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ для несовместных событий?

Упражнения

1. Вычислите $P(A \cup B)$, если:

а) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}4$;

б) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}3$.

2. Вычислите вероятность пересечения событий A и B, если:

а) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}9$;

б) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}8$.

3. Могут ли события C и D быть такими, что $P(C) = 0{,}6$, $P(D) = 0{,}7$ и $P(C \cap D) = 0{,}1$?

4. Известно, что $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}8$ и $P(A \cap B) = 0{,}2$. Докажите, что событие $A \cup B$ является достоверным.

5. Вероятность того, что по дороге из школы домой вы встретите черную кошку, равна 0,1. Вероятность того, что по дороге из школы домой вы встретите злую собаку, равна 0,4. Вероятность того, что вам встретятся и черная кошка, и злая собака, равна 0,04.

а) Найдите вероятность того, что вам встретится хотя бы одно из этих животных.

б) Найдите вероятность того, что вы не встретите ни черную кошку, ни злую собаку.

6. Вероятность того, что вас вызовут завтра к доске на первом уроке, равна 0,1. Вероятность того, что завтра вас вызовут к доске на втором уроке, равна 0,3. Вероятность того, что вас вызовут завтра и на первом, и на втором уроках, равна 0,03. Найдите вероятность того, что вас завтра:

а) вызовут хотя бы на одном из двух первых уроков;

б) не вызовут ни на одном из двух первых уроков.

7*. Пользуясь диаграммой Эйлера для событий A, B и C, докажите формулу сложения вероятностей для трех событий:

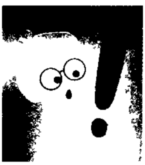
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

37. Случайный выбор

В задачах предыдущего пункта мы все время имели дело со случайным выбором одного предмета из нескольких. Например, в коробке пять карандашей разных цветов. Не заглядывая в коробку, возьмем первый попавшийся карандаш. Это будет ***выбор наудачу***. Выбор наудачу означает выбор без каких-либо предпочтений. Выбор наудачу входит как часть во многие игры: наудачу выбирают бочонок с номером при игре в лото; наудачу выбирают карты во многих карточных играх; в лотереях наудачу выбирают номера выигрышных билетов и т. д.

В ***социологических опросах*** выбор наудачу используется для формирования группы опрашиваемых людей. При контроле качества выпускаемой продукции также используется выбор наудачу, чтобы сократить затраты контроля.

Выбор наудачу называют также ***случайным выбором***.



Определение. ***Случайный выбор*** одного предмета из группы — это выбор, при котором все предметы имеют равные шансы быть выбранными.

Если группа — это упомянутые 5 карандашей, то каждый карандаш может быть выбран с вероятностью $\frac{1}{5}$. Если в группе N предметов, то при случайном выборе каждый из них может быть выбранным с вероятностью $\frac{1}{N}$.

Выбор наудачу мы рассматриваем как разновидность случайного опыта с равновозможными элементарными событиями. Элементарным событием в таком опыте является извлечение одного предмета из группы.

После выбора наудачу одного предмета случайный выбор можно продолжить: из оставшихся предметов выбрать еще один. Затем из оставшихся предметов случайно выбрать третий и т. д. Собранную таким способом группу называют ***случайной выборкой***. Численность выборки обычно назначают заранее.

Случайную выборку можно получить иначе: сразу выбрать наудачу из общей совокупности нужное число предметов. Два карандаша из пяти можно выбирать наудачу один за другим, а можно взять наудачу два карандаша сразу. Замечательно, что в обоих случаях вероятность выбора каких-нибудь двух определенных карандашей вместе одинакова.

Отметим, что организовать действительно случайный выбор не просто. Для этого надо принимать специальные меры: бросать жребий, использовать специальные таблицы случайных чисел и т. п.

Если выбор «как попало» поручить человеку, то выбор не окажется случайным. Многочисленные опыты показали, что равномерного распределения шансов при этом не получается. Например, если человек пытается по своему разумению осуществить случайный выбор ученика из списка класса, то чаще всего шансы учеников, стоящих первыми и последними в этом списке, будут ниже, чем у остальных.

В этом пункте объяснялось, что такое случайный выбор и где он применяется. Еще мы узнали, что существуют специальные методы для проведения случайного выбора.

Вопросы

1. Что называют случайным выбором?

2. Бросают правильную игральную кость. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из ее граней?

3. Бросают правильную монету. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из ее сторон?

4. Является ли выбор самого высокого ученика в классе случайным?

5. Группа детей состоит из двух мальчиков и четырех девочек. Из группы решили наудачу выбрать мальчика. Каковы при этом шансы девочек быть выбранными? Можно ли считать этот выбор случайным выбором ребенка из группы?

6. Приведите примеры случайного выбора.

7. Что называют выборкой?

8. Что такое последовательный способ формирования выборки?

9. Зачем для формирования выборки нужны специальные приемы случайного выбора?

Практическое задание

Цель исследования. Установить, можно ли считать первую пришедшую в голову цифру от 0 до 9 случайной.

Ход исследования. В классе должно присутствовать по крайней мере 20 учащихся. Каждый ученик, приготовив заранее листок бумаги и ручку, по команде учителя, не задумываясь, быстро пишет на листке четыре первые пришедшие ему в голову цифры от 0 до 9.

Затем все листки сдаются учителю. Учитель сам или с помощником подсчитывает, сколько раз написана каждая из цифр. Полученные данные заносятся в таблицу.

Анализ результатов. Если выбор носит чисто случайный характер, то все цифры должны встретиться примерно одинаковое количество раз. Например,

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сколько раз эта цифра написана										

если в классе 20 учеников, то всего получено 80 цифр. Тогда каждая цифра должна встречаться примерно 8 раз. Если цифра встречается менее 4 раз, то ее можно считать «редкой». Если цифра встретилась более 12 раз, то такая цифра «частая». Пользуясь построенной таблицей, ответьте на вопросы.

а) Есть ли в таблице «частые» и «редкие» цифры?

б) Попробуйте объяснить, какие исторические явления и культурные традиции связаны с числами 3 и 7. А с числом 8?

Сделайте вывод о том, можно ли считать первую пришедшую в голову цифру случайной.

38. Независимые события. Умножение вероятностей

В жизни мы часто встречаемся с ситуациями, когда события некоторым образом связаны. По наступлению одного из них можно судить о более или менее вероятном наступлении другого. Например, если на небе тучи, то дождь более вероятен, чем в ясную погоду.

Если нам сказали, что на игральной кости выпало число, большее 4, то мы можем ожидать шестерку, но не можем ожидать число 3.

Бывают также события, которые явно не связаны друг с другом. По наступлению одного из них нельзя судить о вероятности другого. Например, при бросании двух костей результат бросания первой кости явно не влияет на результат бросания второй кости. Про такие события в жизни обычно говорят, что они независимы. Оказывается, для таких событий справедлива очень важная формула

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Чтобы пояснить эту формулу, рассмотрим бросание двух игральных костей. В этом опыте 36 элементарных событий. Все они нам хорошо известны: каждое элементарное событие — это пара чисел. Первое число — это число очков на первой кости; второе число — число очков на второй. Каждое число может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$.

Ясно, что результат бросания первой кости не влияет на результат бросания второй. Верно и обратное: результат бросания второй кости не влияет на результат бросания первой.

Пусть событие A — «на первой кости выпала шестерка». Тогда $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$.

Точно так же, пусть событие B — «на второй кости выпала шестерка». Вероятность $\mathrm{P}(B)$ также равна $\frac{1}{6}$.

При бросании двух костей выпадение двух шестерок является событием $A \cap B$. Этому событию благоприятствует ровно одно элементарное событие, и поэтому вероятность двух шестерок равна

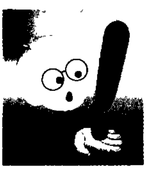
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Получаем, что

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Полученное равенство справедливо не только для указанных событий, но и для других событий A и B, относящихся по отдельности к первому и второму броскам.

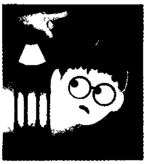
В теории вероятностей выполнение равенства $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ взято за определение независимости событий[1].



Определение. События A и B называются ***независимыми***, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Чаще всего о независимости событий судят не по тому, выполняется или нет равенство $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$, а по тому, **как организован опыт**, в котором эти события наступают. Независимые события возникают, когда случайный опыт состоит из нескольких независимых случайных испытаний. Рассмотрим следующий пример.



Пример 1. Событие A — «на первой кости выпало более трех очков». Событие B — «на второй кости выпало менее трех очков». Будут ли события A и B независимыми?

Элементарные события, благоприятствующие событиям A, B и $A \cap B$, даны в таблицах.

Зная число элементарных событий, благоприятствующих каждому событию, несложно обнаружить, что

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}.$$

[1] Аналогично можно говорить о *независимости трех, четырех и более событий*. Если вероятность пересечения любого набора этих событий равна произведению их вероятностей, то события называются независимыми.

	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
5	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

18 элементарных событий, благоприятствующих событию A

	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

12 элементарных событий, благоприятствующих событию B

	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

6 элементарных событий, благоприятствующих событию $A \cap B$

Заметим, что $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \mathrm{P}(A \cap B)$. Следовательно, события A и B независимы.

Независимые события могут встречаться не только при независимых испытаниях. Поясним это на примере.

Пример 2. Наудачу выбираем число из ряда 1, 2, 3, 4, ..., 100. Пусть событие A состоит в том, что это число четное; событие B — что это число делится на 5. Тогда событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранное число делится и на 2, и на 5. Как известно, это означает, что выбранное число делится на 10.

Покажем, что события A и B независимы. Для этого надо вычислить вероятности $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap B)$ и убедиться в том, что для этих событий выполняется равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Среди 100 первых натуральных чисел всего $100:2 = 50$ четных. Поэтому

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Среди 100 первых натуральных чисел на 5 делятся числа 5, 10, 15, 20, ..., 95, 100 — всего $100:5 = 20$ чисел. Поэтому

$$P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Тем же способом находим, что среди первых 100 натуральных чисел всего $100:10 = 10$ чисел, кратных 10. Следовательно,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}.$$

Таким образом,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \quad \text{и} \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

Получаем

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Обратим внимание, что при случайном выборе, скажем, из первых 99 натуральных чисел эти события уже не будут независимыми.

Мы уже отмечали, что события, относящиеся к двум различным броскам игральной кости, независимы. Эти события могут вместе составлять событие, относящееся к новому случайному опыту — бросанию двух костей.

Замечание. Из формулы $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ видно, что несовместные события независимы, если хотя бы одно из них невозможно. Это можно объяснить и так: если произошло одно из них, то мы заведомо знаем, что не произошло другое.

В этом пункте мы познакомились с независимыми событиями. Мы узнали, что независимость событий часто связана с независимостью опытов, в которых они наступают.

Вопросы

1. Что такое независимые события?
2. События A и $\overline{A}$ имеют положительные вероятности. Могут ли события A и $\overline{A}$ быть независимыми?
3. Являются ли независимыми событиями элементарные события опыта?

Упражнения

1. События U и V независимы. Найдите вероятность события $U \cap V$, если:

а) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}6$;

б) $P(U) = 0{,}1$, $P(V) = 0{,}8$;

в) $P(U) = 1 - \alpha$, $P(V) = 1 - \beta$.

2. События K и L независимы. Найдите вероятность события K, если:

а) $P(L) = 0{,}8$, $P(K \cap L) = 0{,}48$;

б) $P(L) = 0{,}2$, $P(K \cap L) = 0{,}08$;

в) $P(L) = \alpha$, $P(K \cap L) = \alpha\beta$, где $\alpha \neq 0$;

г) $P(L) = 1 - \beta$, $P(K \cap L) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$, где $\beta \neq 1$.

3. События U, V и W независимы. Найдите вероятность события $U \cap V \cap W$, если:

а) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}6$, $P(W) = 0{,}5$;

б) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}3$, $P(W) = 0{,}1$;

в) $P(U) = \alpha$, $P(V) = \beta$, $P(W) = \gamma$.

4. События K, L и M независимы. Найдите вероятность события K, если:

а) $P(L) = 0{,}8$, $P(M) = 0{,}6$, $P(K \cap L \cap M) = 0{,}096$;

б) $P(L \cap M) = 0{,}1$, $P(K \cap L \cap M) = 0{,}06$;

в) $P(M) = \alpha^2\beta$, $P(L) = \alpha\beta^2$, $P(K \cap L \cap M) = \alpha^4\beta^4$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

5. Случайным образом выбираем натуральное число от 1 до 24. Событие C — «число четное». Являются ли события C и D независимыми, если событие D состоит в том, что:

а) выбранное число делится на 3;

б) выбранное число делится на 5;

в) выбранное число делится на 4?

6. Бросают одну игральную кость. Событие A — «выпало четное число очков». Являются ли независимыми события A и B, если событие B состоит в том, что

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало число очков, кратное 5?

7. Монету бросают два раза. Событие A — «первый раз выпал орел». Событие B — «второй раз выпал орел».

а) Выпишите все элементарные события этого случайного эксперимента.

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A, и сколько — событию B?

в) Найдите вероятности событий A, B и $A \cap B$.

г) Являются ли события A и B независимыми?

8. Монету бросают два раза. Событие A — «первый раз выпал орел». Событие B — «второй раз выпала решка».

а) Выпишите все элементарные события этого случайного эксперимента.

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A, и сколько — событию B?

в) Найдите вероятности событий A, B и $A \cap B$.

г) Являются ли события A и B независимыми?

9. Игральную кость бросают два раза. В таблице элементарных событий этого случайного эксперимента выделите элементарные события, благоприятствующие каждому из событий A, B и $A \cap B$. Проверьте, являются ли события A и B независимыми, если:

а) A — «на первой кости четное число очков», B — «на второй кости четное число»;

б) A — «на первой кости нечетное число очков», B — «на второй кости выпало 6».

10. Предположим, что вероятность встретить по дороге из школы черную кошку равна 0,1, а вероятность встретить злую собаку равна 0,3. Считая, что собака и кошка гуляют независимо друг от друга, найдите вероятность того, что по дороге из школы повстречаются и черная кошка, и злая собака.

11. Вероятность того, что лампочка в люстре перегорит в течение года, равна 0,2. Считая, что лампочки перегорают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что в течение года перегорят все лампочки в люстре, если в люстре:

а) две лампочки; б) три лампочки; в) пять лампочек.

12. На клавиатуре компьютера 105 клавиш. Найдите вероятность того, что обезьяна, нажав поочередно две клавиши случайным образом, напишет слово «ОЙ».

13. Из ящика, где хранятся 9 желтых и 15 зеленых карандашей, продавец, не глядя, вынимает один за другим 2 карандаша. Найдите вероятность того, что оба карандаша окажутся:

а) желтыми; б) зелеными.

14. Красная Шапочка несет пирожки от мамы к бабушке через темный лес. На рис. 14 изображена схема дорожек в лесу. На каждой развилке Красная Шапочка наудачу выбирает одну из дорожек и идет по ней дальше. К дому бабушки ведет только один путь. Остальные приводят в болото или к Волку. Найдите вероятность того, что Красная Шапочка благополучно дойдет до бабушки.

15. У Ивана Ивановича есть компьютер, на котором он пишет книгу воспоминаний. Все клавиши на клавиатуре работают хорошо, и только клавиша

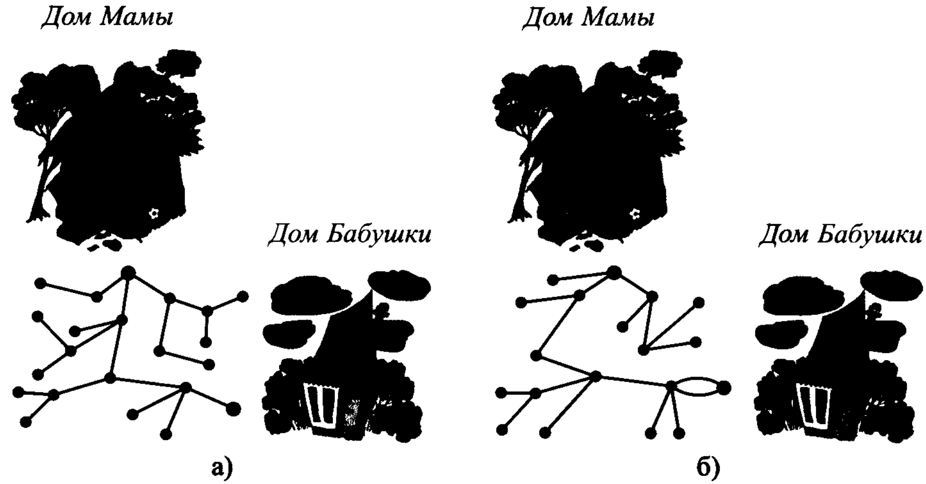


Рис. 14

М работает неправильно. С вероятностью $\frac{1}{3}$ при нажатии этой клавиши получается буква П, а с вероятностью $\frac{2}{3}$ — буква М. Найдите вероятность того, что фраза «*Много лет назад, когда я был маленьким мальчиком*» будет написана правильно с первой попытки.

16. Монету бросают три раза. Событие A — «первые два раза выпал орел». Событие B — «третий раз выпала решка».

а) Выпишите все элементарные события этого случайного эксперимента.

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A, и сколько — событию B?

в) Найдите вероятности событий A, B и $A \cap B$.

г) Являются ли события A и B независимыми?

17*. В классе 20 человек, из них 12 девочек. С помощью жребия из класса выбирают 4 дежурных. Найдите вероятность того, что все выбранные окажутся:

а) девочками; б) мальчиками.

18*. На кассе универмага продаются леденцы. В какой-то момент в коробке осталось 10 красных, 9 синих и 6 зеленых леденцов. Таня, Ваня и Маня по очереди покупают по одному леденцу. Кассир, не глядя, достает леденцы из коробки. Найдите вероятность того, что:

а) Таня и Ваня получат зеленые, а Маня — красный леденец;

б) Таня и Маня получат синие, а Ваня — красный;

в) Таня получит зеленый, Ваня — красный, а Маня — синий;

г) все трое получат красные леденцы.

19*. Найдите вероятность получить n разных результатов, бросив игральную кость n раз, если:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$; д) $n = 7$.

20*. В кармане у Нади лежит 5 леденцов и 6 ирисок. Каждую минуту Надя наудачу вынимает сласти из кармана по одной и отправляет их в рот. Найдите вероятность того, что через 4 минуты в кармане останется:

а) 5 леденцов и 2 ириски; б) только 1 леденец и 6 ирисок.

21*. Иван Иванович звонит старому другу. Он хорошо помнит начало номера 981 и последние четыре цифры: 3, 4, 8, 0. К сожалению, Иван Иванович забыл порядок последних четырех цифр. Найдите вероятность того, что, набрав наудачу 981-30-84, он дозвонится старому другу.

22*. В Союзе Рыжих состоит 20 членов, 12 из них математики, остальные — литераторы. Однажды, гуляя по городу, математик, состоящий в Союзе Рыжих, встретил по очереди двух других членов Союза. Найдите вероятность того, что:

а) первый встреченный был также математиком, а второй — литератором;

б) оба встреченных были математиками;

в) оба встреченных были литераторами;

г) первый встреченный был литератором, а второй — математиком.

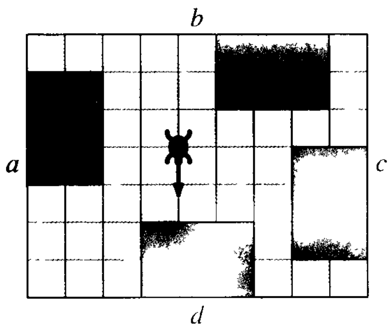


Рис. 15

23*. В комнате расположены четыре шкафа, как показано на рис. 15. Черепаха начинает ползти по направлению, указанному стрелкой. Каждый раз, натыкаясь на шкаф, черепаха поворачивает влево или вправо (с равными вероятностями) и снова ползет по прямой. Так повторяется до тех пор, пока черепаха не достигнет какой-нибудь стены комнаты. Найдите вероятность того, что черепаха остановится:

а) у стены a; б) у стены b;

в) у стены c; г) у стены d.

24*. Класс, в котором учится Миша, состоит из 20 человек. 1 марта учитель математики и учитель русского языка, не договариваясь между собой, случайным образом вызывают по одному ученику к доске. Вычислите вероятность того, что 1 марта:

а) Мишу вызовут к доске и на уроке математики, и на уроке русского языка;

б) Мишу не вызовут к доске ни на одном из этих уроков;

в) Мишу вызовут к доске хотя бы на одном из этих уроков.

25*. В некотором случайном эксперименте вероятность события A равна 0,4, вероятность события B равна 0,5. Известно, что события A и B независимы. Найдите вероятность события $A \cup B$.

26*. События A и B независимы. Пользуясь результатом задачи 9 а) п. 35, докажите, что независимы события:

а) $\overline{A}$ и B; б) $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

27*. События K и L имеют положительные вероятности и несовместны. Могут ли эти события быть независимыми?

28*. Докажите, что если события A и $\overline{A}$ независимы, то одно из них — достоверное, а другое — невозможное.

Как ошибся Эдгар По

Знаменитый автор детективов Э. А. По в эпилоге рассказа «Мари Роже» рассуждает о вероятностях, возникающих при бросаниях костей, таким образом: *«...обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение ее в третий раз и дает все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий еще пока только в будущем...»*

Ясно, что в ошибку впадает сам Эдгар По. Эта ошибка хорошо известна. Человек, допускающий эту ошибку, не учитывает, что все испытания независимы.

Поэтому вероятность выпадения трех шестерок равна

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

Эта вероятность достаточна мала.

Однако шестерка уже выпала два раза подряд. Вероятность этого события, как мы знаем, равна $\frac{1}{36}$. **Это событие уже осуществилось!** Поэтому, чтобы получить три шестерки подряд, достаточно еще одной шестерки. Вероятность этого равна $\frac{1}{6}$.

Таким образом, вероятность выпадения трех шестерок подряд, если уже выпало две шестерки подряд, не $\frac{1}{216}$, а $\frac{1}{6}$.

Дублирование важных систем (как победить стечение обстоятельств?)

Впасть в ошибку, похожую на ошибку Эдгара По, очень просто. Люди часто недооценивают грозящую опасность и ведут себя легкомысленно, не учитывая, что по мере наступления различных неблагоприятных событий вероятность опасности может увеличиваться.

При создании систем безопасности и защиты используются свойства независимых событий.

Чтобы многократно уменьшить вероятность катастрофы, **все жизненно важные системы автомобилей, судов и самолетов дублируются**. При этом каждая такая система не зависит от работы остальных. **Поломки двух независимых систем также являются независимыми.**

Предположим, что в автомобиле две независимые тормозные системы и вероятность отказа одной из них при нажатии на тормоз равна 0,0001. Тогда вероятность одновременного отказа обеих систем равна $0{,}0001^2$, то есть 0,00000001. Эта вероятность ничтожна.

В современных автомобилях два независимых контура системы тормозов. Да еще ручной тормоз. В пассажирских самолетах по меньшей мере два двигателя, две системы электроснабжения, две системы управления. И все равно...

Мы слышим, что автокатастрофа случилась из-за неисправности тормозов. Мы удивляемся — как так, ведь тормоза продублированы! А на самом деле один тормозной контур в этом автомобиле не работал уже год, а водитель все никак не находил времени отдать машину в ремонт. Ручной тормоз тоже вышел из строя месяц назад — оборвался тросик, но водитель не обращал внимания — ерунда, потом сделаю... В результате такого отношения к делу гибнут люди.

При посадке разбился самолет — несчастливое стечение обстоятельств. Метель над аэропортом, сдвинулся тяжелый контейнер в грузовом отсеке, уставший пилот ошибся в оценке высоты, диспетчер не проверил информацию пилота... Каждая из этих неприятностей сама по себе еще не смертельна и вполне вероятна. А вот вероятность совпадения всех этих обстоятельств ничтожна. Но когда произошло одно из них, вероятность катастрофы многократно возросла. Случилось еще одно — вероятность несчастья еще умножилась, но ни диспетчер, ни пилот этого не знали.

Есть много неприятных обстоятельств, которые никто не может ни предусмотреть, ни предотвратить. Но есть и такие, про которые говорят — «человеческий фактор». Обычно это словосочетание звучит по радио и телевидению тогда, когда кто-то понадеялся на опыт, надежность, везение, а надежды не оправдались.

Многие из вас, ребята, скоро сядут за руль автомобиля. Кто-то будет поднимать в воздух тяжелые самолеты. Другие поведут железнодорожные составы, морские и речные суда. А кто-то будет принимать решения, сидя в кресле диспетчера. Кто-то будет проектировать или строить здания и сооружения, корабли, самолеты и автомобили.

От ошибок не гарантирован никто, но уменьшить вероятность беды можно. Для этого **нужно не оставлять на волю случая то, что должно быть сделано вовремя человеком.**

Вопросы

4. В чем состоит ошибка Эдгара По?

5. Приведите примеры дублирования важных систем. Зачем это делается?

Глава VIII. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный задачам выбора и расположения предметов из различных множеств. Типичной задачей комбинаторики является задача перечисления комбинаций, составленных из нескольких предметов.

39. Правило умножения

Пример 1. Предположим, что имеется белый хлеб, черный хлеб, сыр, колбаса и варенье. Сколько видов бутербродов можно приготовить?

Выпишем сначала бутерброды с белым хлебом. Это бутерброд с сыром (БС), с колбасой (БК) и вареньем (БВ). Столько же бутербродов можно приготовить и с черным хлебом: ЧС, ЧК и ЧВ.

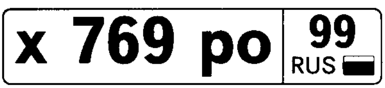
Всего получается 6 видов бутербродов. Это число можно найти с помощью так называемого **комбинаторного правила умножения**.

Правило умножения. Чтобы найти число комбинаций предметов двух типов, нужно число предметов первого типа умножить на число предметов второго типа. Если число предметов первого типа равно m, а число предметов второго типа равно n, то число их комбинаций равно mn.

Такое же правило действует, если имеются предметы трех, четырех или более типов.

Чтобы найти число комбинаций из предметов нескольких типов, нужно перемножить количества предметов каждого типа.

Поясним это на примере.



Пример 2. Государственные регистрационные автомобильные номера состоят из буквы, трех цифр, еще двух букв и номера региона. Буквы и цифры могут повторяться. Буквы берутся не всякие. Можно использовать только 12 букв: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. (Почему именно эти буквы? Попробуйте догадаться самостоятельно.) Цифры можно брать любые от 0 до 9. В качестве номера региона для московских автомобилей используется одно из чисел 77, 99, 97 или 177.

39. Правило умножения

Сколько всего можно составить регистрационных номеров для автомобилей в Москве?

Будем рассуждать так же, как и в предыдущем примере: первую букву можно взять одну из 12. Первую цифру берем одну из 10, вторую — снова одну из 10 и третью — снова одну из 10. Затем две буквы подряд. Каждая выбирается из 12 разрешенных букв. И наконец, номер региона. Он может оказаться одним из 4.

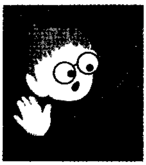
Вот сколько всего получилось вариантов:

$$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 12^3 = 6\,912\,000.$$

На самом деле номер региона не присваивается просто так. Сначала всем автомобилям присваивали номер региона 77. Впоследствии, когда эти номера были исчерпаны, стали давать номера 99, потом 97, а в последнее время присваивают номера 177.

Таким образом, в Москве всего может существовать почти семь миллионов автомобильных номеров. И это — не считая номеров старого образца, федеральных, дипломатических, именных и номеров автомобилей спецслужб. Это не означает, что число машин в Москве настолько велико. Часть автомобилей снимается с регистрации, но их номера не присваиваются другим автомобилям во избежание путаницы.

Этот пункт рассказал нам о комбинаторном правиле умножения, с помощью которого можно найти число комбинаций из предметов двух, трех и более типов.



Вопросы

1. Сформулируйте комбинаторное правило умножения для подсчета числа комбинаций предметов двух типов.

2. Сформулируйте правило умножения для подсчета числа комбинаций предметов нескольких типов.

Упражнения

1. Сколько можно составить пар, выбирая:

а) первый предмет из 4, а второй из 8;

б) первый предмет из 6, а второй из 3;

в) первый предмет из 15, а второй из 12?

2. Сколько можно составить троек, выбирая:

а) первый предмет из 4, второй из 8, а третий из 5;

б) первый предмет из 7, второй из 4, а третий из 9;

в) первый предмет из 5, второй из 13, а третий из 21?

3. В школе есть все классы с 1 по 11. Каждый из них имеет дополнительную букву «а», «б», «в», «г» или «д». Например, класс 1а, 7б и тому подобное. Сколько всего классов в этой школе?

4. В автоматических камерах хранения на железнодорожных вокзалах применяется шифр, который состоит из одной буквы и трех цифр. Буквы берутся от А до К, исключая буквы Ё и Й, а цифры могут быть любыми от 0 до 9, например,

Д195.

Сколько можно составить различных шифров?

5. На каждом барабане игрального автомата изображены символы: «вишня», «лимон» и числа от 1 до 9. Автомат имеет три одинаковых барабана, которые вращаются независимо друг от друга. Сколько всего комбинаций может выпасть?

6. Первый класс праздновал Новый Год. Каждая девочка подарила каждому мальчику открытку, а каждый мальчик подарил каждой девочке гвоздику. Чего было больше — подаренных открыток или подаренных гвоздик?

7*. Второй класс, в котором 23 ученика, но мальчиков меньше, чем девочек, отправился на экскурсию в музей. За время экскурсии каждый мальчик по одному разу дернул за косичку каждую девочку. Сколько мальчиков и девочек в классе, если всего было произведено 132 дергания за косички?

8*. На приеме в посольстве встретились две делегации, в каждой из которых было несколько дипломатов. Каждый дипломат одной делегации пожал руку каждому дипломату второй делегации. Сколько было членов в каждой делегации, если всего произошло 143 рукопожатия?

9*. Важные данные в компьютере часто защищают паролем. Предположим, что пароль содержит 8 символов: больших и малых латинских букв, цифр и некоторых знаков. Всего разрешенных символов 92. Составьте числовое выражение для общего числа возможных паролей. Пользуясь калькулятором, вычислите приближенно его значение.

40. Перестановки. Факториал

Подсчитаем, сколько существует разных способов каждому из троих людей присвоить номер от 1 до 3. Тот же самый вопрос можно задать иначе: сколькими способами можно построить трех человек в шеренгу?

На первое место можно поставить любого из трех человек. На второе — любого из двух оставшихся. И на последнее место можно поставить только одного оставшегося человека. Первого человека можно выбирать 3 способами, второго — двумя способами, а третьего — одним-единственным способом.

Таким образом, мы получили $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов перестановки трех человек. На рис. 1 показаны все эти способы.

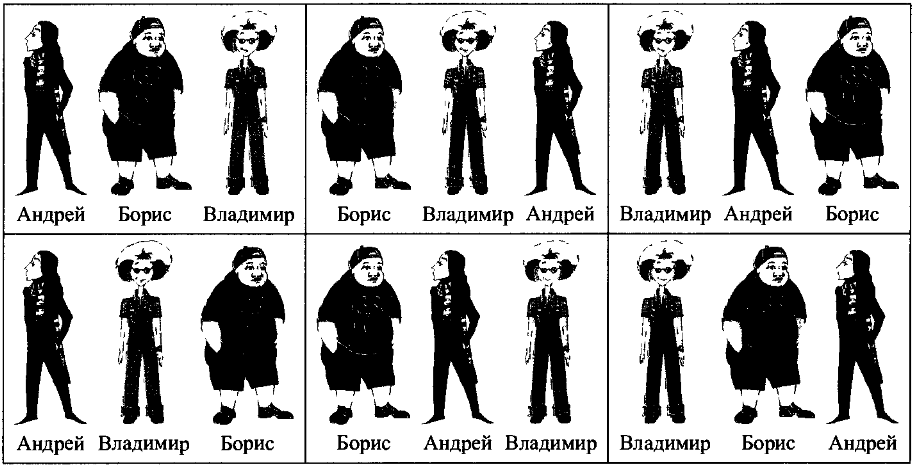
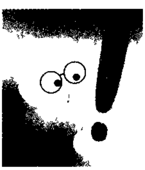


Рис. 1

Если людей четверо, то первый номер мы можем присвоить любому из четверых, а оставшиеся номера распределить 6 способами между тремя оставшимися. Получаем $4 \cdot 6 = 24$ способа нумерации. Остается напомнить, что 6 мы получали как $3 \cdot 2 \cdot 1$.

Продолжая рассуждения тем же способом, мы обнаружим, что если людей, например, семеро, то из них можно составить $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ различных ***перестановок***.

Обобщим полученные результаты. Если есть n предметов, то число способов перенумеровать их равно $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.



Определение. ***Факториалом*** натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Обозначается факториал $n!$.

Итак,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Подведем итоги.

Перестановкой из n предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд).

Число перестановок n предметов равно $n!$.

Для того, чтобы в различных формулах не делать исключения для числа 0, принято соглашение

$$0! = 1.$$

Приведем таблицу факториалов от 0 до 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Факториал $n!$ очень быстро растет с увеличением n. Поэтому даже для 10 предметов перестановок очень много и выписать все практически невозможно.

В этом пункте рассказано, сколькими способами можно перенумеровать несколько предметов. Оказывается, для этого нужно уметь находить факториалы натуральных чисел.

Вопросы

1. Что такое перестановка?
2. Чему равно число различных перестановок из n предметов?
3. Что такое факториал натурального числа?
4. Чему равен факториал нуля?

Упражнения

1. Саша, Ваня и Петя получили номера 1, 2 и 3 для участия в соревнованиях. Запишите в таблицу все возможные способы распределения этих номеров между участниками.

	1 способ	2 способ	3 способ	4 способ	5 способ	6 способ
Саша						
Ваня						
Петя						

2. В автосервис одновременно приехали 3 машины для ремонта. Сколько существует способов выстроить их в очередь на обслуживание?

3. Сколько есть способов раздать спортивные номера с 1 по 5 пяти хоккеистам?

4. Участники лыжных соревнований стартуют с интервалом в 30 секунд. Чтобы определить порядок старта, спортсмены тянут жребий, определяющий номер старта. Сколько существует различных последовательностей выхода лыжников на старт, если в соревнованиях принимает участие:

а) 6 лыжников; б) 8 лыжников; в) 10 лыжников; д) k лыжников?

5. Сколько различных последовательностей (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова:

а) «учебник»; б) «автор»; в) «фонарь»; г)* «боб»?

6. Вычислите значение дроби:

а) $\frac{5!}{2!}$; б) $\frac{7!}{5!}$; в) $\frac{10!}{8!}$; г) $\frac{100!}{99!}$; д)* $\frac{15!}{13!\cdot 2!}$; е)* $\frac{12!}{9!\cdot 3!}$.

7*. Выпишите все натуральные делители числа:

а) 4!; б) 5!; в) 6!.

8*. Докажите, что если $n < m$, то $m!$ делится на $n!$ без остатка.

41. Правило умножения и перестановки в задачах на вычисление вероятностей

Задачи, которые мы будем сейчас решать, отличаются от тех, что мы решали ранее, только числом возможных элементарных событий в опыте.

Пример 1. В классе 30 человек. Среди них нет двух учеников одинакового роста. По команде учителя физкультуры они выстраиваются в одну шеренгу в случайном порядке. Найдем вероятность того, что они встали по росту.

Решение. Общее число равновозможных событий равно числу перестановок 30 учащихся: $N = 30!$. Число это настолько велико, что лучше оставить его в таком виде. Ученики по росту могут встать двумя способами: по возрастанию или по убыванию. Поэтому событию A «встали по росту» благоприятствуют два исхода: $N(A) = 2$. Тогда

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{30!}.$$

Это число приблизительно равно

$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,007\,54.$$

Вот уж действительно маловероятнейшее событие! Рассчитывать на такую случайность не следует.

Пример 2. В страховой компании — рекламная акция: компьютер случайным образом выбирает автомобильный номер, и владелец автомобиля с таким номером получает скидку. Найдем вероятность того, что счастливый номер «в 845 ма».

Решение. Как мы знаем, каждая буква выбирается из 12, а цифры — из 10 возможных. Поэтому число элементарных событий можно найти по правилу умножения:

$$N = 12\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12 = 10^3\cdot 12^3 = 1\,728\,000.$$

Событию A «номер в 845 МА» благоприятствует единственное событие. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{1\,728\,000} \approx 0{,}000\,000\,578\,7.$$

Пример 3. Какова вероятность того, что среди последних четырех цифр в семизначном номере телефона Ивана Ивановича есть цифра 8? (Мы рассматриваем только последние четыре цифры, так как первые три цифры в телефонном номере — это номер АТС, и не все такие последовательности встречаются.)

В этой задаче удобнее найти вероятность противоположного события $\overline{A}$ «среди четырех последних цифр нет цифры 8».

Рассмотрим опыт, состоящий в выборе последних четырех цифр телефонного номера. Каждую цифру можно выбрать десятью способами. Число комбинаций найдем по правилу умножения:

$$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000.$$

Это и есть общее число элементарных событий нашего опыта. Будем считать их равновозможными.

Теперь нужно найти число исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$, т. е. число четырехзначных комбинаций, не содержащих цифру 8. В этом случае для каждой цифры есть только девять способов выбора. Число благоприятствующих событий равно

$$N(\overline{A}) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561.$$

Поэтому $P(\overline{A}) = \frac{6561}{10\,000} = 0{,}6561.$

Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}3439.$

В этом пункте мы увидели, как с помощью правила умножения и факториала можно решать некоторые задачи на расчет вероятностей.

Упражнения

1. Найдите вероятность того, что трехзначный номер случайно проезжающей мимо машины состоит из цифр 0, 4 и 5 в произвольном порядке.

2. Найдите вероятность того, что среди трех последних цифр случайного телефонного номера не окажется:

а) цифры 0; б) цифры 2; в) цифр 1 и 6; г) цифр 2, 5 и 7.

3. Какова вероятность того, что среди последних четырех цифр случайного телефонного номера:

а) встретится цифра 7; б) встретится цифра 2 или цифра 3;

в) встретится хотя бы одна из цифр 4, 0 или 1;

г) будет хотя бы одна из цифр 1, 2, 4 и 9.

4. Десять школьников в случайном порядке заходят в класс на экзамен. Каждый из них называет фамилию. Председатель экзаменационной комиссии записывает на листочке фамилии в том порядке, в каком входят школьники. Найдите вероятность того, что фамилии окажутся записаны:

а) в алфавитном порядке;

б) в порядке, обратном алфавитному.

5. На полке у Миши 6 видеокассет. На дне рождения Миша снял все кассеты с полки. Часть фильмов ребята посмотрели вместе, а когда гости ушли, Миша поставил все кассеты снова на полку в случайном порядке. Найдите вероятность того, что кассеты оказались в том же порядке, что были прежде.

6. Имеется 12 компьютерных дисков и 12 коробок от них. Найдите вероятность того, что, случайным образом уложив диски в коробки, мы обнаружим, что:

а) каждый диск лежит в своей коробке;

б) хотя бы один диск лежит не в своей коробке;

в) два определенных диска перепутаны местами, а остальные диски — в своих коробках;

г) ровно один диск лежит не в своей коробке, а остальные — в своих коробках.

7. Имя «ДАНЯ» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что, составив эти четыре картонки случайным образом в ряд, мы получим имя «НАДЯ».

8. Слово «ТОВАР» написали на картонке и разрезали картонку на буквы. Девочка, играя, выложила их в ряд в случайном порядке. Найдите вероятность того, что получилось слово «АВТОР».

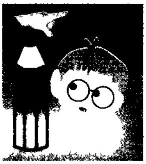
9. Слово «АПЕЛЬСИН» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Девочка, играя, выложила их в ряд в случайном порядке. Найдите вероятность того, что получилось слово «СПАНИЕЛЬ».

10. Слово «САХАР» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что, составив эти пять картонок случайным образом в ряд, мы снова получим слово «САХАР».

11*. Слово «МАТЕМАТИКА» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что, составив все эти буквы случайным образом в ряд, мы снова получим слово «МАТЕМАТИКА».

12*. Найдите вероятность того, что среди последних четырех цифр случайного семизначного телефонного номера есть ровно одна цифра 1 и ровно одна цифра 7.

42. Сочетания



Пример 1. Из трех игроков, заявленных на теннисный матч, надо выбрать двух для выступления в парном разряде (порядок игроков не существен). Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Если обозначить игроков различными буквами: A, B, C, то мы можем выписать все возможные комбинации из этих букв:

AB BA CA

AC BC CB

Сначала мы брали игрока A и добавляли к нему в пару еще одного из двух оставшихся игроков. Так получились первые две пары AB и AC в нашем списке. Затем в качестве первого игрока мы взяли игрока B и к нему добавляли одного из двух оставшихся. Так получились пары BA и BC. Наконец, первым поставили игрока C и добавляли к нему одного из оставшихся игроков. Получили последние две пары CA и CB.

Однако среди полученных таким образом комбинаций получились перестановки одной и той же пары. Например, AB и BA — это одна и та же пара. Совпадают и другие пары: AC и CA, а также BC и CB. Таким образом, получаются всего три различные пары:

AB AC BC

Заметим, что общее число всех возможных комбинаций букв A, B и C сократилось в 2 раза. Это произошло потому, что из двух разных букв можно составить ровно две перестановки.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать двух игроков из четырех заявленных на матч?

Решение. Обозначим игроков A, B, C и D. Начнем, как и в предыдущем примере, составлять пары. Первого игрока мы можем выбрать четырьмя способами. Вторым к нему мы можем взять любого из оставшихся трех:

AB BA CA DA

AC BC CB DB

AD BD CD DC

Получилось 12 комбинаций. При этом, как и в предыдущем примере, каждая пара посчитана дважды. Поэтому различных пар всего 6:

AB AC AD BC BD CD.

42. Сочетания

Если есть n предметов, то число способов, которыми можно выбрать ровно k из них, называется ***числом сочетаний*** из n по k и обозначается C_n^k («цэ из эн по ка»).

Таким образом, мы установили, что $C_3^2 = 3$, $C_4^2 = 6$.

Можно доказать, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, с помощью факториала число сочетаний выражается через числа n и k.

Пример 3. Найти C_9^4.

Решение. Мы имеем $C_9^4 = \frac{9!}{4!\cdot(9-4)!} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}$.

Сократим произведения $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ в числителе и знаменателе: $C_9^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$.

Теперь снова можно произвести сокращения:

$$C_9^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{4} = 9\cdot 2\cdot 7 = 126.$$

В этом пункте объяснялось, что такое число сочетаний. Помимо этого, мы теперь знаем формулу для числа сочетаний.

Вопросы

1. Что такое число сочетаний?
2. Как обозначить число сочетаний из 6 по 5?

Упражнения

1. Найдите:

а) C_4^3; б) C_5^2; в) C_7^5; г) C_5^4; д) C_9^3; е) C_8^5.

2. Сравните числа:

а) C_5^2 и C_5^3; б) C_7^2 и C_7^5; в) C_{10}^3 и C_{10}^7; г) C_8^1 и C_8^7.

3. Вычислите:

а) C_4^0; б) C_5^5; г) C_7^0; д) C_8^8; е) C_{101}^{101}.

4. Сколько существует способов выбрать один объект из совокупности 50 предметов?

5. Сколькими способами можно выбрать 49 предметов из 50 предметов?

6. Сколькими способами можно выбрать:

а) 7 предметов из 9; б) 2 предмета из 6; в) 4 предмета из 7;

г) 5 предметов из 10?

7. Сколькими способами можно отобрать стартовую шестерку в волейбольном матче, если в команде заявлено 10 игроков?

8. Предприниматель хочет отправить рекламные объявления в три из семи городских газет. Сколькими способами можно выбрать эти 3 газеты?

9. Иван Иванович купил билет «Спортлото 5 из 36». Он должен зачеркнуть ровно 5 номеров из 36. Сколько существует способов это сделать?

10. Иван Никифорович купил билет «Лотто 6 из 49». Он должен зачеркнуть ровно 6 номеров из 49. Сколько существует способов это сделать?

11. На билете лотереи «Честная игра» имеется 20 закрытых букв, ровно 10 из них — буквы слова «АВТОМОБИЛЬ». Буквы разбросаны случайным образом. По правилам лотереи если владелец билета, открыв ровно 10 букв, откроет все буквы слова «АВТОМОБИЛЬ», то он выигрывает автомашину.

а) Сколько всего существует способов открыть 10 букв?

б) Сколько существует способов открыть 10 букв так, чтобы выиграть автомобиль?

12*. В классе 25 учеников. Сколькими способами учитель может выбрать в этом классе для опроса:

а) 5 разных учеников; б) 6 разных учеников; в) 20 разных учеников?

13*. Муха ползет по решетке размером 3×3 из точки A в точку B (см. рис. 2), двигаясь все время вправо или вниз. Сколько различных маршрутов может выбрать муха?

Решение. Как бы ни ползла муха, она должна сделать всего 6 шагов: три «шага» вправо (П) и три шага вниз (Н). Маршрут мухи можно записать в виде последовательности шести букв. Например, ПНПННП.

Таким образом, вопрос сводится к тому, сколько существует способов расставить три буквы П в последовательности шести букв.

Ответ: $C_6^3 = 20$.

14*. Ответьте на вопрос предыдущей задачи для решетки размером 4×5 (см. рис. 3).

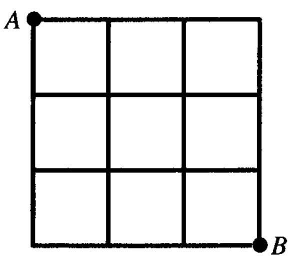


Рис. 2

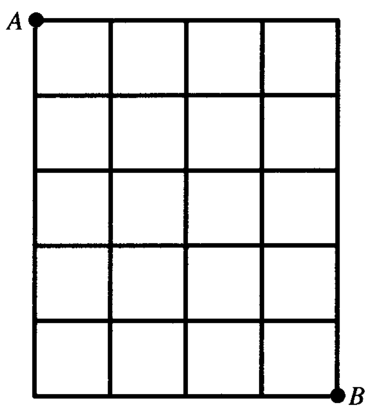


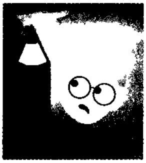
Рис. 3

43. Сочетания в задачах на вычисление вероятностей

Умение находить число сочетаний по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

позволяет проще решать многие из уже известных задач. Кроме того, мы теперь научимся решать задачи, к которым раньше было трудно подойти.



Пример 1. В группе пять человек: Ваня, Саша, Маша, Таня и Коля. По жребию двое из них выбраны дежурными. Найти вероятность того, что это Ваня и Таня.

Решение. Число элементарных событий в этом опыте равно числу сочетаний из 5 по 2: $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. Все элементарные события равновозможны. Событию A «дежурят Ваня и Таня» благоприятствует только одно элементарное событие. Поэтому $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Пример 2. В ящике 4 красных и 2 желтых флажка. Из него наудачу извлекают 3 флажка. Какова вероятность того, что все эти флажки красные?

Решение. Число элементарных событий в этом опыте равно $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$. Все они равновероятны. Число благоприятных событий для события A «вынули три красных флажка» равно числу способов выбрать 3 красных флажка из 4 красных флажков, имеющихся в ящике. Это число равно $C_4^3 = 4$. Поэтому $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{20} = 0{,}2$.

Пример 3*. Найдем вероятность того, что, извлекая наудачу 5 флажков из ящика, в котором 8 красных и 7 желтых флажков, мы вытащим ровно 3 красных и 2 синих флажка?

Общее число элементарных событий равно числу сочетаний из 15 флажков по 5: $N = C_{15}^5$.

Набрать 3 красных флажка из 8 можно одним из C_8^3 способов. Точно так же, набрать 2 синих флажка из 7 можно одним из C_7^2 способов. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A «3 красных и 2 синих», равно $N(A) = C_8^3 \cdot C_7^2$. Таким образом,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^3 \cdot C_7^2}{C_{15}^5}.$$

Вычислим эту вероятность:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3003;$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56; \quad C_7^2 = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21.$$

Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{21\cdot 56}{3003} = \frac{56}{143} \approx 0{,}392.$$

Здесь мы видели, как, умея находить число сочетаний по формуле, можно решать довольно сложные задачи по теории вероятностей.

Упражнения

1. Для участия в телевикторине случайным образом выбирают 3 игроков из 8 претендентов. Какова вероятность того, что будут выбраны 1-й, 4-й и 8-й игроки?

2. В тираже лотереи «Спортлото» разыгрывались 6 случайных номеров из 49. (Сейчас существует похожая лотерея «Лотто 6 из 49».) В кинокомедии «Спортлото-82» главный герой зачеркивает номера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите вероятность того, что в тираже выиграют именно эти шесть номеров.

3. Какова вероятность того, что в тираже лотереи «Спортлото 6 из 49» выпадут номера 4, 28, 17, 8, 12, 32? Отличается ли она от вероятности выпадения номеров 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

4. На двери установлен кодовый замок с кнопками. На кнопках изображены цифры от 0 до 9. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать три кнопки неизвестного нам кода. Найдите вероятность открыть дверь с первой попытки, нажав три кнопки наудачу.

5. На билете лотереи «Честная игра» имеется 20 закрытых букв, ровно 10 из них — буквы слова «АВТОМОБИЛЬ». Найдите вероятность, открыв случайным образом 10 букв, открыть все буквы слова «АВТОМОБИЛЬ».

6. Найдите вероятность того, что все буквы «о» окажутся на своих местах, если случайным образом перемешать и выстроить в ряд все буквы слова

а) «топор»; б) «молоток»; в) «околоток»; г) «обороноспособность».

7. На книжной полке 7 романов и 4 повести, расположенные в случайном порядке. С полки сняли 8 первых попавшихся книг. Найдите вероятность того, что на полке остались:

а) только повести; б) только романы.

8. Последние четыре цифры в семизначном телефонном номере — это 1, 2, 3 и 4. Найдите вероятность того, что номер оканчивается на 43 или 34.

9. Перед приемом у посольства ожидают три белых и шесть черных лимузинов с гостями. Машины приезжают в случайном порядке. Найдите вероятность того, что первыми приедут:

а) все белые лимузины; б) все черные лимузины.

10*. В магазин привезли 10 синих и 10 коричневых костюмов. Продавщица случайным образом выбирает 8 из них, чтобы выставить на витрине. Найдите вероятность того, что будет отобрано 3 синих и 5 коричневых костюмов.

11*. В партии из 15 деталей 3 бракованных. Покупатель приобрел 5 деталей. Найдите вероятность того, что среди них:

а) нет ни одной бракованной;

б) есть хотя бы одна бракованная;

в) 3 бракованные детали;

г) 2 бракованные детали.

12*. Иван Иванович купил билет лотереи «Спортлото 5 из 36». На билете изображены 36 номеров от 1 до 36. Нужно зачеркнуть ровно 5 из них. При розыгрыше случайным образом выбираются 5 выигрышных номеров. Какова вероятность того, что Иван Иванович, зачеркнув 5 чисел, угадает:

а) ровно 5 выигрышных номеров;

б) ровно 4 выигрышных номера;

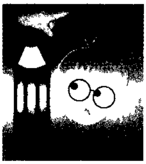
в) ровно 3 выигрышных номера;

г) хотя бы один выигрышный номер.

13*. В кармане у Нади лежит 7 зеленых и 9 красных леденцов. Надя, не глядя, вынимает из кармана 6 леденцов. Найдите вероятность того, что среди них ровно 2 красных.

Глава IX. Геометрическая вероятность

44. Выбор точки из фигуры на плоскости



Пример 1. Рассмотрим мысленный опыт: точку наудачу бросают на квадрат, сторона которого равна 1. Спрашивается, какова вероятность события, которое состоит в том, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не больше чем $\frac{1}{4}$?

В этой задаче речь идет о так называемой ***геометрической вероятности***. Рассмотрим более общие условия опыта. Точку наудачу бросают в фигуру F на плоскости. Какова вероятность того, что точка попадет в некоторую фигуру G, которая содержится в фигуре F (рис. 1)?

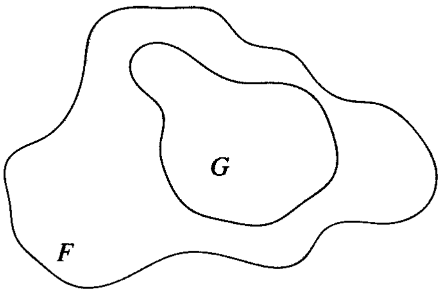


Рис. 1

Ответ зависит от того, какой смысл мы вкладываем в выражение «бросить точку наудачу». Обычно это выражение трактуют так:

1. Брошенная точка может попасть в любую часть фигуры F;
2. Вероятность того, что точка попадет в некоторую фигуру G внутри фигуры F, прямо пропорциональна площади фигуры G.

Подведем итог: пусть S_F и S_G — площади фигур F и G. Вероятность события A «точка X принадлежит фигуре G, которая содержится в фигуре F», равна

$$P(A) = \frac{S_G}{S_F}.$$

Заметим, что площадь фигуры G не больше, чем площадь фигуры F, поэтому $P(A) \leqslant 1$.

Вернемся к нашему примеру. Фигура F в этом примере — квадрат со стороной 1 (рис. 2). Поэтому

$$S_F = 1.$$

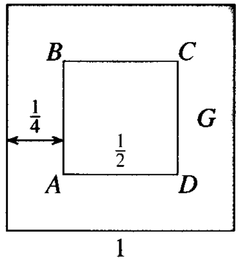


Рис. 2

Точка удалена от границы квадрата не более чем на $\frac{1}{4}$, если она попала в заштрихованную на рисунке фигуру G, напоминающую рамку для фотографии. Чтобы найти площадь S_G, нужно из площади квадрата F вычесть площадь внутреннего квадрата $ABCD$. Сторона квадрата $ABCD$ равна $\frac{1}{2}$, поэтому

$$S_{ABCD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$S_G = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Поэтому вероятность того, что точка попала в фигуру G, равна

$$\frac{S_G}{S_F} = \frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Из треугольника ABC случайным образом выбирается точка X. Найти вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника.

Решение. Средние линии разбивают треугольник ABC на четыре равных малых треугольника, площадь каждого из которых обозначим через Q (рис. 3). Тогда площадь треугольника ABC в 4 раза больше: $S_{ABC} = 4Q$. Интересующее нас событие D состоит в том, что точка X принадлежит малому треугольнику MNK.

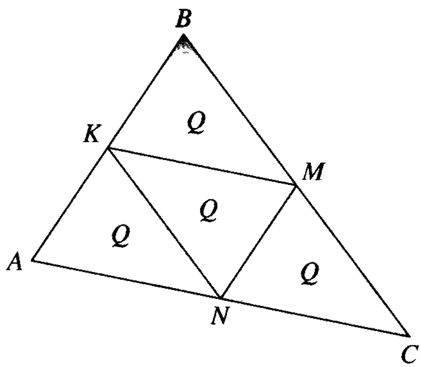


Рис. 3

Вероятность события D найдем по формуле

$$P(D) = \frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{Q}{4Q} = \frac{1}{4}.$$

В этом пункте рассматривались геометрические вероятности, связанные с бросанием точки внутрь фигуры на плоскости. Оказывается, вероятность попадания точки в некоторую фигуру прямо пропорциональна площади этой фигуры.

Вопросы

1. Точку наудачу бросают в квадрат $ABCD$. Какова вероятность того, что точка попала в треугольник ABC?

2. Какие события рассматриваются в опыте, состоящем в случайном выборе точки фигуры на плоскости?

3. Как определяется геометрическая вероятность события при выборе точки фигуры на плоскости?

4. Почему вероятность события «точка X принадлежит фигуре G, которая содержится в фигуре F» не больше 1?

Упражнения

1. Внутри треугольника ABC случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка попала в треугольник ABM, где AM — медиана треугольника ABC.

2. В прямоугольник случайным образом бросается точка. Найдите вероятность события:

а) «точка принадлежит ромбу, вершинами которого служат середины сторон прямоугольника»;

б) «точка принадлежит треугольнику, вершинами которого служат две соседние вершины прямоугольника и точка пересечения его диагоналей».

3. В квадрате случайным образом берется точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в этот квадрат кругу.

4. В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит треугольнику ADM, где точка M:

а) является серединой стороны CD;

б) делит отрезок CD в отношении $1:2$, считая от точки C;

в) делит отрезок CD в отношении $m:n$, считая от точки C.

5. В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции $AMCD$, где точка M:

а) является серединой стороны BC;

б) делит отрезок BC в отношении $1:2$, считая от точки C;

в) делит отрезок BC в отношении $m:n$, считая от точки B.

6. В круге случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит:

а) вписанному в круг квадрату;

б) вписанному в круг равностороннему треугольнику.

7. В прямоугольнике со сторонами 6 и 20 см нарисованы два непересекающихся круга диаметром 3 см каждый. Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка этого прямоугольника:

а) не принадлежит ни одному из этих кругов;

б) не принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

8*. Буратино посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 20 см на 25 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил еще одну такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

45. Выбор точки из отрезка и дуги окружности

Рассмотрим мысленный эксперимент, который состоит в случайном выборе одной точки X из некоторого отрезка MN. Это можно понимать так, будто точку X случайным образом «бросают» на отрезок. Элементарным событием в этом опыте может стать выбор любой точки отрезка.

Пусть отрезок CD содержится в отрезке MN. Нас интересует событие A, состоящее в том, что выбранная точка X принадлежит отрезку CD (рис. 4).

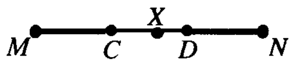


Рис. 4

Метод вычисления этой вероятности тот же, который мы использовали в предыдущем пункте для фигур на плоскости: вероятность пропорциональна длине отрезка CD.

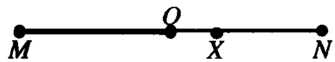
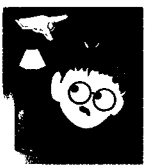


Рис. 5

Следовательно, вероятность события A «точка X принадлежит отрезку CD, содержащемуся в отрезке MN» равна,

$$P(A) = \frac{CD}{MN}.$$

Это число неотрицательное и не превосходит 1, как и полагается для вероятности случайного события



Пример 1. Внутри отрезка MN случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что точка X ближе к N, чем к M.

Решение. Пусть O — середина отрезка MN (рис. 5). Обозначим указанное событие через A. Это событие наступит только тогда, когда точка X лежит внутри отрезка ON. Тогда

$$P(A) = \frac{ON}{MN} = 0{,}5.$$

Ничего не меняется, если точка X выбирается не из отрезка, а из дуги некоторой кривой линии. Например, можно случайным образом выбирать точку X на окружности.

Пример 2. На окружности даны точки A и B, причем эти точки не являются диаметрально противоположными. На этой же окружности случайным образом выбирается точка C. Найдите вероятность того, что отрезок BC пересекает диаметр окружности, проходящий через точку A.

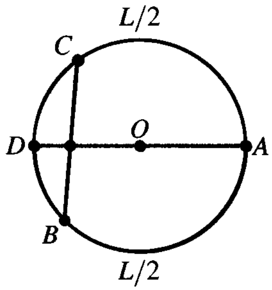


Рис. 6

Решение. Пусть длина окружности равна L. Интересующее нас событие E «отрезок BC пересекает диаметр DA» наступает, только если точка C лежит на полуокружности DA, не содержащей точку B (рис. 6). Длина полуокружности равна $\frac{L}{2}$. Найдем вероятность события E:

$$P(E) = \frac{L}{2} : L = \frac{1}{2}.$$

Мы рассмотрели опыт, состоящий в выборе точки из отрезка или дуги окружности, и научились искать вероятности событий в этом опыте с помощью определения геометрической вероятности.

Вопросы

1. Сколько элементарных событий возникает при выборе случайной точки из отрезка?

2. Сформулируйте определение вероятности события «точка X принадлежит отрезку CD внутри отрезка MN».

3. Почему вероятность события «точка X принадлежит отрезку CD внутри отрезка MN» не превосходит 1?

Упражнения

1. Отрезок AB разбит точками C и D на три равные части так, что точка C лежит между точками A и D. Случайным образом точку X бросают на отрезок AB. Найдите вероятность того, что точка X:

а) принадлежит отрезку CD;
б) не принадлежит отрезку CD; в) совпадет с точкой C;
г) принадлежит отрезку AD; д) принадлежит отрезку CB;
е) совпадет с одним из концов отрезка AB.

2. Длина отрезка MN равна 3 см. Из этого отрезка наудачу выбирают одну точку. Найдите вероятность того, что эта точка:

а) удалена от точки M менее чем на 1 см;

б) удалена от точки M не более чем на 2 см;

в) удалена от обоих концов более чем на 0,5 см;

г) удалена от ближайшего из концов менее чем на 0,25 см.

3. Углы AOB и COD вертикальные. При этом точка C лежит на луче AO и $\angle AOB = 60°$. На окружность с центром в точке O бросают случайным образом точку X. Найдите вероятность того, что точка X лежит:

а) внутри хотя бы одного из углов BOC или AOD;

б) внутри угла DOC.

4. В окружность вписан квадрат $ABCD$. На окружности случайным образом выбирается точка M. Найдите вероятность того, что эта точка лежит на:

а) меньшей дуге AB; б) большей дуге AB.

5. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На этой окружности случайным образом выбирают две точки D и E. Найдите вероятность того, что отрезок DE:

а) не пересекает ни одну из сторон треугольника;

б) пересекает хотя бы одну сторону треугольника;

в) пересекает ровно две стороны треугольника;

г) пересекает стороны AB и BC.

6. Вернувшись из отпуска, Иван Иванович обнаружил, что стенные часы давно остановились. Найдите вероятность того, что время, которое показывают стоящие часы, отличается от действительного времени не больше чем на 30 минут.

46. Выбор точки из числового отрезка

Геометрическую вероятность можно применять к числовым промежуткам. Предположим, что случайным образом выбирается число x, удовлетворяющее условию $m \leqslant x \leqslant n$. Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка $[m;n]$ на числовой прямой выбирается точка с координатой x.

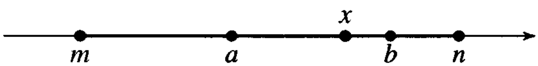


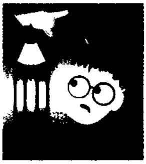
Рис. 7

Рассмотрим событие, состоящее в том, что точка с координатой x выбрана из отрезка $[a;b]$, содержащегося в отрезке $[m;n]$. Это событие обозначим

$(a \leqslant x \leqslant b)$. Его вероятность равна отношению длин отрезков $[a;b]$ и $[m;n]$:

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \frac{b-a}{n-m}.$$

Поясним сказанное на примере.



Пример 1. Найти вероятность того, что точка, случайно выбранная из отрезка $[0;1]$, принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.

Решение. По формуле геометрической вероятности находим:

$$P\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Согласно правилам дорожного движения, пешеход может перейти улицу в неустановленном месте, если в пределах видимости нет пешеходных переходов. В городе Миргороде расстояние между пешеходными переходами на улице Солнечной равно 1 км. Пешеход переходит улицу Солнечную где-то между этими двумя переходами. Он может видеть знак перехода не дальше чем за 100 м от себя. Найдите вероятность того, что пешеход не нарушает правила.

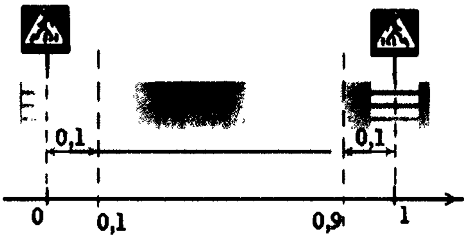


Рис. 8

Решение. Воспользуемся геометрическим методом. Расположим числовую прямую так, что участок улицы между переходами окажется отрезком $[0;1]$ (рис. 8). Пусть пешеход подходит к улице в некоторой точке с координатой x. Пешеход не нарушает правила, если он находится на расстоянии более чем 0,1 км от каждого перехода, т. е. если $0{,}1 < x < 0{,}9$. Найдем вероятность этого события:

$$P(0{,}1 < x < 0{,}9) = \frac{0{,}9-0{,}1}{1} = 0{,}8.$$

Пример 3. Поезд проходит мимо платформы за полминуты. В какой-то момент, совершенно случайно выглянув из своего купе в окно, Иван Иванович увидел, что поезд идет мимо платформы. Иван Иванович смотрел в окно ровно 10 секунд, а затем отвернулся. Найдите вероятность того, что он видел Ивана Никифоровича, который стоял ровно посередине платформы.

Решение. Воспользуемся геометрическим методом (рис. 9). Будем вести отсчет в секундах. За 0 с примем момент, когда Иван Иванович поравнялся с началом платформы. Тогда конца платформы он достиг в момент 30 с. За x с обозначим момент, когда Иван Иванович выглянул в окно. Следовательно, число x случайным образом выбирается из отрезка $[0;30]$. С Иваном Никифоровичем Иван Иванович поравнялся в момент 15 с. Он увидел Ивана Никифоровича, только если он выглянул в окно не позже этого момента, но не раньше, чем за 10 с до этого. Таким образом, нужно найти геометрическую вероятность события $5 \leqslant x \leqslant 15$.

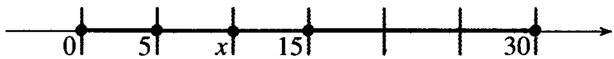


Рис. 9

По формуле находим

$$P(5 \leqslant x \leqslant 15) = \frac{15-5}{30-0} = \frac{1}{3}.$$

Этот пункт распространил понятие геометрической вероятности на числовые промежутки.

Упражнения

1. Из отрезка $[0;1]$ случайным образом выбирается число x. Найдите вероятность того, что:

а) $x < 0{,}5$; б) $x > 0{,}7$; в) $x \leqslant 0{,}3$; г) $x \geqslant 0{,}9$;
д) $0{,}4 \leqslant x \leqslant 0{,}6$; е) $x \leqslant 0{,}3$ или $x \geqslant 0{,}5$; ж) $x < 2$; з) $x \leqslant 0$.

2. Из отрезка $[0;1]$ случайным образом выбирается число x. Найдите вероятность того, что:

а) $2x < 0{,}5$; б) $3x \geqslant 0{,}9$; в) $2x - 1 \leqslant 0{,}4$;
г) $5x - 4 > 0{,}5$; д) $0{,}4 \leqslant 2x \leqslant 0{,}6$; е) $3x \leqslant 0{,}3$ или $5x \geqslant 0{,}5$;
ж) $3x - 3 > 0$; з) $17x + 4 \leqslant 0$; и) $3x \neq 0{,}4$.

3. Из отрезка $[0;1]$ случайным образом выбирается число x. Найдите вероятность того, что:

а) $x^2 < 0{,}25$; б) $x^2 \geqslant 0{,}09$; в) $x^2 - 1 \leqslant -0{,}36$;
г) $x^3 > 0{,}027$; д) $0{,}002 \leqslant 2x^3 \leqslant 0{,}016$; е) $x^2 \leqslant 0{,}04$ или $x \geqslant 0{,}5$;
ж) $(x+1)^2 > 2{,}25$; з) $(x-2)^2 \leqslant 1$.

4. Из отрезка $[0;1]$ случайным образом независимо друг от друга выбираются две точки x и y. Найдите вероятность того, что:

а) $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$; б) $x > 0{,}7$, $y < 0{,}4$; в) $0{,}2 < x < 0{,}8$, $0{,}3 < y < 0{,}5$;

г) $x < 0{,}9$, $y < 0$; д) $x < 1$, $y > 0{,}4$.

5. На отрезок $[3;6]$ случайным образом бросается точка x. С какой вероятностью выполняется неравенство:

а) $3 \leqslant x \leqslant 4$; б) $1 \leqslant x \leqslant 4{,}5$; в) $5 < x < 7$;

г) $2x - 1 > 9$; д) $|x - 4| > 1$; е) $16 < x^2 \leqslant 25$?

6. Из отрезка $[2;5]$ случайным образом выбирается отрезок $[a;b]$ длины 1. Найдите вероятность события:

а) $a < 3$; б) $b < 4$; в) $a > 3$; г) $a \geqslant 4$;

д) середина отрезка $[a;b]$ заключена между точками 3 и 4;

е) середина отрезка $[a;b]$ заключена между точками 2,5; 4,5.

7. На окружности с центром O выбрана точка A. Случайным образом бросают точку X на эту окружность. Найдите вероятность того, что угол AOX:

а) меньше $90°$; б) больше $120°$;

в) находится в пределах от $30°$ до $60°$.

8. Про село Иваново известно только, что оно находится где-то на шоссе между Миргородом и Старгородом. Длина шоссе равна 200 км. Найдите вероятность того, что:

а) от Миргорода до Иваново по шоссе меньше 20 км;

б) от Старгорода до Иваново по шоссе больше 130 км;

в) Иваново находится менее чем в 5 км от середины пути между городами.

9. Иван Иванович обещал позвонить Ивану Никифоровичу между 15:00 и 16:00. Известно, что Иван Иванович всегда держит свое слово. А вот Ивану Никифоровичу, который ждал у телефона звонка, пришлось отлучиться на 10 минут. Найдите вероятность того, что звонок Ивана Ивановича застал Ивана Никифоровича у телефона.

10. В самом начале поэмы Н. В. Гоголя «Мертвые души» два мужика спорят относительно того, как далеко доедет колесо в экипаже Чичикова:

«...два русские мужика, стоявшие у дверей кабака против гостиницы, сделали кое-какие замечания, относившиеся впрочем более к экипажу, чем к сидевшему в нем. «Вишь ты», сказал один другому: «вон какое колесо! что ты думаешь, доедет то колесо, если б случилось, в Москву, или не доедет?» — «Доедет», отвечал другой. «А в Казань-то, я думаю, не доедет?» «В Казань не доедет», отвечал другой».

Предположим, что путь от упомянутой гостиницы в Казань ведет через Москву и что до Москвы 140 верст, а от Москвы до Казани — еще 760 верст.

Считая, что колесо может сломаться в любой момент на пути от гостиницы до Казани, найдите вероятность того, что

а) колесо доедет до Москвы, как и предполагают мужики;

б) колесо не доедет даже до Москвы.

11. Из 20 часов вещания телевизионного канала 2 часа идет реклама, 4 часа — боевики, 5 часов — сериалы про любовь, 30 минут — мультфильмы, 1,5 часа — новости, 3 часа — телешоу, 30 минут — документальный фильм, 30 минут — научно-популярный фильм, 1 час — концерт, 30 минут — передача о здоровье и 1,5 часа — футбол.

Миша любит мультфильмы, художественные фильмы, футбол и научно-популярные фильмы. В какой-то момент Миша включил телевизор. Найдите вероятность того, что Миша в этот момент:

а) увидит рекламу;

б) увидит боевик или телешоу;

в) попадет на одну из своих любимых телепередач.

Глава X. Испытания Бернулли

47. Успех и неудача

Определение. ***Испытанием Бернулли***[1] называют случайный опыт, который может закончиться одним из двух элементарных событий.

Например, подброшенная монета падает либо орлом, либо решкой вверх. Стрелок может попасть в мишень, а может промахнуться. Ученик в тесте может выбрать правильный ответ, а может выбрать неправильный ответ. Мы многократно встречались с такими опытами.

Одно из двух элементарных событий в таких опытах условно называют ***успехом***, а другой — ***неудачей***.

Вероятность того, что опыт закончится успехом, обычно обозначают буквой p. Вероятность неудачи обозначают q. Числа p и q положительные, при этом $p+q=1$.

Если проводится несколько одинаковых и независимых испытаний Бернулли подряд, то говорят, что проведена ***серия*** или ***последовательность испытаний Бернулли***. Серия испытаний Бернулли также является случайным экспериментом.

Рассмотрим элементарные события для последовательности из 3 испытаний Бернулли. Каждое испытание оканчивается либо успехом, либо неудачей. В случае успеха мы будем писать букву У, а в случае неудачи — букву Н. Таким образом, после 3 испытаний мы можем получить следующие элементарные события:

УУУ, УУН, УНУ, УНН, НУУ, ННУ, НУН и ННН.

Мы получили 8 элементарных событий при трех испытаниях Бернулли. Поскольку отдельные испытания Бернулли независимы, вероятность каждого элементарного события находим по правилу умножения вероятностей: каждую букву У заменяем вероятностью успеха p, а каждую букву Н — вероятностью неудачи q и затем вероятности перемножаем.

---

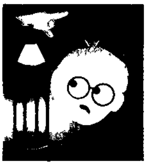
[1] Название дано в честь Якоба Бернулли, который триста лет назад изучил эксперимент с двумя исходами. Эти простейшие случайные эксперименты оказались очень важными для науки.

Например, элементарное событие УУН имеет вероятность $p \cdot p \cdot q = p^2q$. Занесем результаты вычислений в таблицу:

	УУУ	УУН	УНУ	УНН	НУУ	ННУ	НУН	ННН
Вероятность	p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3

Точно так же можно составить таблицу элементарных событий и их вероятностей для серии из 4, 5 и более испытаний Бернулли.

Для 3 испытаний мы получили $8 = 2^3$ элементарных событий, для 4 испытаний будет уже $16 = 2^4$, для 5 испытаний их будет $32 = 2^5$ и т. д.: для n испытаний мы получим 2^n элементарных событий.



Пример 1. Бросание симметричной монеты. Успехом в этом опыте назовем выпадение орла, а неудачей — выпадение решки. Поскольку монета симметричная, вероятности успеха и неудачи одинаковы: $p = q = \frac{1}{2}$.

Когда мы проводим серию из трех бросаний монеты, то вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{8}$. Действительно, вычислим, например, вероятность элементарного события, в котором последовательно появились орел, решка и снова орел. Для нас это элементарное событие УНУ — успех, неудача и снова успех. Вероятность этого элементарного события равна $p^2q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Такой же результат получится для любого другого элементарного события.

Пример 2. В коробке лежат карандаши: 3 красных и 5 синих. Таким образом, всего карандашей 8. Вынем наудачу один карандаш. Если карандаш окажется красным, то назовем элементарное событие опыта успехом. Если карандаш синий, то будем считать, что опыт окончился неудачей. Такой опыт является испытанием Бернулли. Очевидно, вероятность успеха p равна $\frac{3}{8}$, а вероятность неудачи q равна $\frac{5}{8}$.

Вынутый карандаш мы вернем в коробку. Повторим этот опыт 4 раза. При этом каждый следующий выбор не зависит от предыдущих. Таким образом, мы получаем серию из 4 испытаний Бернулли.

Поставим вопрос: какова вероятность вынуть в первый, третий и четвертый раз красные карандаши, а во второй — синий? Такое событие в наших обозначениях имеет вид УНУУ. И вероятность его равна $pqpp = p^3q$. Подставив известные значения, получим

$$p^3q = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{135}{4096} \approx 0{,}033.$$

Пример 3. В части А Единого государственного экзамена по математике в 2007 г. было 10 заданий. К каждому из них предлагается 4 варианта ответа, из которых ровно один — верный. Успехом назовем выбор верного варианта ответа, неудачей — выбор одного из неверных. Если ученик не знает предмет и отвечает наугад, то с вероятностью $\frac{1}{4}$ он выберет правильный ответ, а с вероятностью $\frac{3}{4}$ — ошибется. Таким образом, для невежественного ученика экзамен превращается в серию испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{4}$ и вероятностью неудачи $q = \frac{3}{4}$.

Какова вероятность, отвечая наудачу, «правильно ответить» хотя бы на одно задание?

Решение. На поставленный вопрос легче ответить, вычислив вероятность противоположного события: «на все вопросы теста ученик ответил неправильно». Это — элементарное событие в серии из 10 испытаний Бернулли, состоящее из 10 неудач:

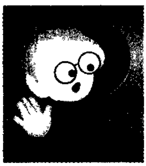
Н Н Н Н Н Н Н Н Н Н.

Его вероятность равна $q^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}056$. Это событие маловероятное.

Поэтому вероятность выбрать хотя бы один верный ответ, отвечая наугад, равна 0,944. Это событие весьма вероятное.

Рассуждая таким же образом в общем случае, мы обнаружим, что **в серии из n испытаний Бернулли вероятность получить каждое элементарное событие, в котором успех наступает ровно k раз, равна p^kq^{n-k}.**

В этом пункте рассказывалось о том, что такое испытание Бернулли, что такое успех и неудача. Кроме того, мы теперь знаем, чему равна вероятность элементарного события, в котором определенным образом чередуются успехи и неудачи.

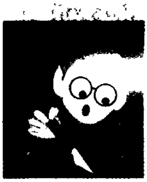


Вопросы

1. Сколько возможных элементарных событий у испытания Бернулли? Как они называются?

2. Каким соотношением связаны вероятности успеха и неудачи?

3. Сколько всего возможно различных элементарных событий в серии из 2 испытаний Бернулли? Из 6 испытаний? Из n испытаний?



Упражнения

1. Эксперимент состоит в 4 последовательных испытаниях Бернулли. Пользуясь обозначениями У для успеха и Н для неудачи, выпишите:

а) все элементарные события, в которых ровно 1 успех;

б) все элементарные события, в которых ровно 2 успеха;

в) все элементарные события, в которых ровно 3 успеха.

2. Пользуясь результатами решения задачи 1, заполните таблицу, в которой указано, сколько может быть элементарных событий без успехов, с одним успехом, с двумя успехами и т. д. в серии из 4 испытаний Бернулли.

Число успехов	0	1	2	3	4
Число благоприятствующих элементарных событий					

3. Эксперимент состоит из пяти последовательных испытаний Бернулли. Пользуясь обозначениями У для успеха и Н для неудачи, выпишите все элементарные события, в которых ровно:

а) 1 успех; б) 2 успеха; в) 3 успеха; г) 4 успеха.

4. В испытании Бернулли известна вероятность успеха p. Найдите вероятность неудачи q, если:

а) $p = \frac{1}{4}$; б) $p = 0{,}02$; в) $p = \frac{2}{7}$; г) $p = 0{,}83$.

5. Миша кидает мяч в баскетбольную корзину. Вероятность попадания равна $p = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что, сделав 5 бросков, Миша попадет в корзину только при втором и четвертом броске.

6. Какова вероятность, отвечая наудачу на вопросы экзамена (см. пример 3), правильно ответить:

а) на первое задание;

б) на первые два задания;

в) только на первое задание;

г) только на первые два задания?

48. Число успехов в испытаниях Бернулли

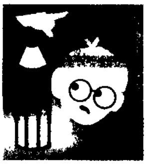
В предыдущем пункте мы описали испытания Бернулли и научились вычислять вероятности элементарных событий в серии испытаний Бернулли. Поставим другую задачу. Сколько элементарных событий в серии из n испытаний Бернулли благоприятствует наступлению определенного числа успехов?

Пусть проводится 5 испытаний. Сколько элементарных событий этой серии приведет к 2 успехам? Снова применим обозначения У и Н для успеха и неудачи. Элементарные события серии из 5 испытаний с 3 успехами могут выглядеть следующим образом:

УУУНН, УУНУН, УУННУ, и т. д.

Таким образом, число элементарных событий с 3 успехами равно числу способов расставить 3 буквы У в последовательности из 5 букв. Это, как известно, число сочетаний C_5^3.

Обобщая этот результат на произвольное число испытаний n, получаем, что число элементарных событий, благоприятствующих k успехам, равно C_n^k.



Пример 1. Чтобы быстрее подсчитать мелочь в конце рабочего дня, кассир заранее складывает рублевые монеты столбиками по десять монет в каждом. При этом каждая монета в столбике с равной вероятностью лежит решкой или орлом вверх. Сколько всего есть способов положить 10 монет в столбик так, чтобы ровно 4 из них лежали орлом вверх?

Решение. Самое главное — увидеть в тексте задачи знакомую схему опыта. Положение каждой монеты внутри столбика можно считать испытанием Бернулли с успехом «монета орлом вверх».

Выкладывание столбика — серия из $n = 10$ испытаний. Число требуемых успехов $k = 4$.

Следовательно, задачу можно переформулировать так: сколько элементарных событий благоприятствует наступлению 4 успехов в 10 независимых испытаниях Бернулли? Это число равно $C_{10}^4 = 210$.

Ответ: 210.

Пример 2. На фабрике елочных игрушек производят электрические гирлянды. В готовую гирлянду рабочий последовательно вставляет 50 лампочек двух цветов — красные и синие, наудачу вынимая их из ящика, где очень много разных лампочек. Сколько он может сделать различных гирлянд, в которых 20 красных лапочек?

Решение. Лампочек в ящике очень много. Поэтому можно считать, что вероятность выбрать синюю или красную лампочку остается неизменной независимо от того, сколько лампочек уже выбрано. Следовательно, эта задача также укладывается в схему независимых испытаний Бернулли.

Одно испытание заключается в выборе цвета очередной лампочки. Успехом назовем выбор красной лампочки, неудачей — выбор синей.

Число испытаний $n = 50$.

Число требуемых успехов $k = 20$.

Таким образом, задачу можно переформулировать так: сколько элементарных событий приводит к 20 успехам в серии из 50 независимых испытаний Бернулли?

Ответ: C_{50}^{20}. Число это огромно, и нет нужды записывать его цифрами.

Сейчас мы узнали, сколько различных элементарных событий приводит к наступлению определенного числа успехов в серии испытаний Бернулли.

Упражнения

1. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие:

а) 3 успехам в серии из 5 испытаний Бернулли;

б) 2 успехам в серии из 4 испытаний Бернулли;

в) 5 успехам в серии из 6 испытаний Бернулли.

2. Сколько элементарных событий в серии из 8 испытаний Бернулли благоприятствует:

а) 2 успехам; б) 6 успехам; в) 5 успехам; г) 3 успехам.

3. Сколько элементарных событий благоприятствует появлению 3 орлов, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 7 раз; г) 9 раз; д) n раз?

4. Проводится серия из 10 испытаний Бернулли. Каких элементарных событий больше: тех, что благоприятствуют 3 успехам, или тех, что благоприятствуют 7 успехам?

5. Проведена серия из n испытаний Бернулли. Найдите n, если общее число элементарных событий равно:

а) 16; б) 64; в) 256; г) 2048; д) 2^m.

6*. Докажите, что в серии из 15 испытаний Бернулли число элементарных событий, благоприятствующих 6 успехам, равно числу элементарных событий, благоприятствующих:

а) 9 неудачам; б) 9 успехам; в) 6 неудачам.

7*. Проводится серия из n испытаний Бернулли. Выразите формулой число элементарных событий, которые благоприятствуют появлению:

а) 2 или 3 успехов; б) не более 5 успехов; в) ровно 4, 6 или 9 успехов;

г) более $n-4$ успехов; д) менее 4 неудач; е) ровно 2, 3 или 4 неудачи.

8*. Найдите число элементарных событий в серии из 134 испытаний Бернулли, которые благоприятствуют появлению:

а) 133 успехов; б) одного успеха.

49. Вероятности событий в испытаниях Бернулли

Мы знаем, что при проведении серии из n независимых испытаний Бернулли одно элементарное событие с k успехами имеет вероятность

$$p^k q^{n-k}.$$

Мы также знаем, что число таких элементарных событий с k успехами равно C_n^k.

Следовательно, событие «наступило ровно k успехов» имеет вероятность

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эта формула дает вероятность того, что в серии из n испытаний Бернулли наступило ровно k успехов, причем в произвольном порядке.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Предположим, что мы стреляем в мишень с вероятностью попадания $\frac{1}{3}$. Всего производится 7 выстрелов. Зададимся вопросом: какова вероятность попасть в мишень ровно 3 раза?

Этот опыт — серия из 7 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{3}$ и вероятностью неудачи $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Пусть событие A состоит в том, что в этой серии наступило ровно 3 успеха — попадания.

Мы знаем, что событию A благоприятствует $C_7^3 = 35$ элементарных событий. Мы также знаем вероятность наступления каждого такого элементарного события:

$$p^3 q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{2187}.$$

Умножая полученную вероятность на число благоприятствующих элементарных событий, мы найдем вероятность события A:

$$\mathrm{P}(A) = 35 \cdot \frac{16}{2187} \approx 0{,}256.$$

Рассмотрим теперь более сложные события, состоящие в том, что число успехов заключено в некоторых пределах.

Пример 2. Бросим игральную кость. Успехом будем считать выпадение шестерки. Неудачей — выпадение иного числа очков. Таким образом, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

Решение. Найдем вероятность того, что, бросив кость 8 раз, мы выбросим шестерку не менее 4, но не более 6 раз.

Чтобы решить эту задачу, нужно отдельно найти вероятности того, что шестерка выпала 4, 5 или 6 раз, и их сложить:

$$C_8^4 p^4 q^4 + C_8^5 p^5 q^3 + C_8^6 p^6 q^2 =$$

$$= 70 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 56 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 28 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}0306.$$

В некоторых задачах удобно вместо вероятности нужного события сначала найти вероятность противоположного события.

Пример 3. Найдем вероятность события A, состоящего в том, что в серии из 6 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}3$ наступит хотя бы один успех.

Решение. Вместо события A рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ «наступит 0 успехов». Вероятность этого события найти несложно. Учитывая, что вероятность неудачи q равна 0,7, получаем

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}117649.$$

Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}117649 = 0{,}882351.$

Этот пункт посвящен вероятности наступления определенного числа успехов в серии испытаний Бернулли. Получена формула для вычисления такой вероятности.

Упражнения

1. В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}5$. Найдите вероятность того, что в серии из 4 таких испытаний:

а) наступило ровно два успеха;

б) наступил ровно один успех;

в) наступило ровно три успеха;

г) все испытания окончились неудачей.

2. Найдите вероятность появления ровно 3 орлов в серии бросаний симметричной монеты, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 7 раз; г) 9 раз; д) 8 раз; е) n раз?

3. Игральную кость бросают 6 раз. Найдите вероятность того, что шестерка выпадет:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 1 раз; г) 6 раз; д) 2 раза; е) ни разу.

4. В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}4$. Найдите вероятность того, что в серии из 4 таких испытаний:

а) наступило более двух успехов;

б) наступило не более двух неудач;

в) не все испытания окончились неудачей;

г) наступило менее четырех успехов.

5. В некотором испытании Бернулли неудача наступает с вероятностью $q = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что в серии из 5 таких испытаний:

а) наступило ровно два успеха;

б) наступил ровно один успех;

в) наступило более двух успехов;

г) наступило менее четырех успехов.

6. Случайный эксперимент заключается в 5-кратном бросании симметричной монеты. Найдите вероятность события:

а) «выпадет ровно 3 орла»;

б) «выпадет не менее 2, но не более 4 орлов»;

в) «выпадет либо 1 решка, либо 3 решки»;

г) «орел выпадет нечетное число раз»;

д) «решка выпадет не менее 3 раз»;

е) «либо ровно 2 раза выпадет решка, либо ровно 1 раз выпадет орел».

7. Олегу задали 10 одинаковых по трудности задач. Вероятность того, что Олег решает задачу, равна 0,75. Найдите вероятность того, что Олег решит:

а) все задачи; б) не менее 8 задач; в) не менее 6 задач.

8. Перед началом футбольного матча судья проводит жеребьевку между капитанами обеих команд, чтобы определить, кто первый будет владеть мячом. Шансы у капитанов равны. В серии из пяти товарищеских матчей между командой «Мотор» и командой «Стартер» три раза мяч доставался по жеребьевке «Мотору». Найдите вероятность того, что в будущем году в такой же серии матчей повторится то же самое.

9. Перед началом шахматной партии с помощью жребия игроки определяют, кто играет белыми, а кто черными. Остап Бендер проводит сеанс одновременной игры с любителями шахмат города Васюки на 12 досках. Найдите вероятность того, что он играет белыми:

а) ровно на 3 досках; б) ровно на 5 досках; в) не менее чем на 1 доске;

г) по крайней мере на 2 досках.

10. Остап Бендер играет 8 шахматных партий против членов шахматного клуба. Остап играет плохо, поэтому вероятность выигрыша им каждой партии равна 0,01. Найдите вероятность того, что Остап выиграет хотя бы одну партию.

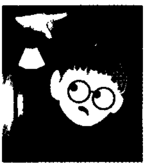
Глава XI. Случайные величины

50. Примеры случайных величин

В теории вероятностей, кроме случайных событий, **изучаются случайные величины.** Случайные величины тоже связаны со случайными опытами. Случайная величина — это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился данный случайный опыт. Разным элементарным событиям при этом могут соответствовать разные значения случайной величины. Поэтому говорят, что ***случайная величина*** — это величина, значение которой зависит от случая. В ходе некоторого случайного опыта или наблюдения случайная величина принимает то или иное числовое значение.

Отметим и такую возможность, что случайная величина принимает одно и то же значение при всяком исходе случайного опыта. Такую не меняющую своего значения, то есть постоянную величину тоже можно называть случайной — для единообразия и чтобы не делать оговорок.

Приведем несколько примеров случайных величин.



Пример 1. Предположим, некто кидает игральную кость. Случайной величиной X будем считать число выпавших очков. Поскольку кубик имеет шесть граней и число очков на каждой грани — целое число от 1 до 6, случайная величина X принимает значения из множества $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Пример 2. Рост наудачу выбранного человека можно рассматривать как случайную величину, измеряя его, например, в сантиметрах.

Пример 3. Срок службы телевизора или стиральной машины — случайная величина. Срок службы отсчитывается в днях от момента выпуска или продажи. Свойства этой случайной величины важны, например, при установлении гарантийного периода на новый прибор.

Пример 4. Число бракованных деталей в партии из 100 одинаковых деталей, взятых на контроль — случайная величина.

Пример 5. Напряжение в бытовой электрической сети — случайная величина, значения которой колеблются около 220 вольт.

Пример 6. Вес расфасованных продуктов может несколько отличаться от веса, указанного на упаковке. Шоколадный батончик массой 50 г на самом деле может весить чуть больше или чуть меньше. Потребитель такие отличия не заметит. Зато производителю батончиков колебания в весе небезразличны. В случае серьезного смещения среднего веса в ту или иную сторону производитель может понести убытки.

Пример 7. Важным примером случайной величины является число успехов в серии испытаний Бернулли.

Пусть, например, проводится 10 испытаний Бернулли. Число успехов в этой серии может принимать любое целое значение 0 до 10. Число неудач также является случайной величиной.

Замечание. Если значения какой-либо величины поддаются точному вычислению, то ее не рассматривают как случайную и изучают другими методами. Например, можно точно сказать, каким днем недели будет 23 сентября 2010 г.: здесь нет случайности.

Пример 8. Можно точно вычислить, чему равна сумма $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$. Поэтому значение этой суммы не является случайной величиной. Однако если дать эту задачу на контрольной работе в школе, то полученные ответы могут отличаться от верного ответа непредсказуемым образом. Поэтому ответ школьника можно рассматривать как случайную величину.

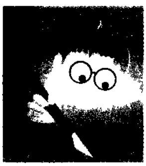
Пример 9. Будем бросать монету до первого выпадения орла. Число бросаний будет случайной величиной, значением которой может быть любое натуральное число.

В этом пункте рассказано, что помимо случайных событий теория вероятностей изучает случайные величины, и приведены примеры случайных величин.

Вопросы

1. Приведите три-четыре примера случайных величин. Вы можете легко найти примеры, вспомнив игры, в которые вы играете. Другие примеры можно найти в наблюдениях за погодой.

2. Можно ли рассматривать школьную оценку как случайную величину? Приведите аргументы «за» и «против».



Упражнения

1. Спортивная встреча проводится до двух побед в трех партиях. Можно ли считать число сыгранных партий случайной величиной? Какие значения может принимать эта случайная величина?

2. Спортивная встреча проводится до трех побед в пяти партиях. Какие значения может принимать случайная величина «число сыгранных партий»?

3. В моментальной лотерее участвуют три типа билетов: без выигрыша (выигрыш 0 рублей), с выигрышем 10 рублей и 50 рублей. Играющий вынимает один билет. Можно ли считать выигрыш играющего случайной величиной? Какие значения может принимать эта величина, если играющий вынимает

а) один билет; б) два билета?

4. В книжке 16 страниц. Вы наугад открываете книжку и смотрите номер левой страницы. Можно ли считать эту величину случайной? Какие значения может она принимать?

5. Возьмем произвольное слово русского языка из четырех букв. Можно ли считать количество букв «М» в выбранном слове случайной величиной? Какие значения может принимать эта случайная величина?

6. Какие значения может принимать случайная величина X:

а) X — «сумма очков при бросании двух игральных кубиков»;

б) X — «сумма очков при бросании трех игральных кубиков»;

в) X — «сумма цифр телефонного номера» (считайте, что номер семизначный и первая его цифра не равна нулю).

7. Известно, что в классе учится 32 ученика. Из них 20 девочек. Какие значения может принять случайная величина:

а) «число девочек, присутствующих сегодня в классе»;

б) «число учеников, отсутствующих сегодня в классе»?

Сколько различных значений может принять каждая из этих случайных величин?

8. Пусть случайная величина M — число выпадений орла при десяти подбрасываниях монеты. Какие значения может принимать случайная величина M?

Подбросьте монету 10 раз и запишите в таблицу значение случайной величины M. Повторите этот эксперимент 10 раз и заполните таблицу:

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число выпадений орла										

Пользуясь полученной таблицей, ответьте на вопросы.

а) Все ли возможные значения приняла величина M в ваших экспериментах?

б) Какое значение величина M принимала чаще всего?

9*. Контрольную работу по математике написали 25 учеников. Все они получили оценки от 2 до 5. Сколько всего различных значений может принять случайная величина «средняя оценка за контрольную работу»? Какие это значения?

51. Распределение вероятностей случайной величины

Случайная величина возникает как результат случайного опыта. Предположим, что случайная величина X в некотором опыте может принимать несколько значений. **Чтобы полностью описать случайную величину X, надо указать, с какими вероятностями она принимает эти значения.** Если, например, величина X может принять значение 5, то нужно указать вероятность события «X равно 5». Если величина X может принять значение -4, то нужно указать вероятность события «X равно -4». Такие события принято обозначать $(X = 5)$, $(X = -4)$ и т. д.

Указать вероятность каждого значения можно с помощью таблицы, графика, диаграммы или формулы. В следующем примере указаны значения случайной величины и вероятности этих значений с помощью таблицы.

Пример 1. Случайная величина Y равна числу очков, выпавших при однократном бросании игрального кубика. Таблица значений этой случайной величины и их вероятностей выглядит так:

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

В этом примере все вероятности одинаковые. Вероятность поровну распределена между шестью возможными значениями.

Рассмотрим еще одну случайную величину.

Пример 2. Игральную кость бросают дважды. Таблица элементарных событий этого опыта нам известна. По горизонтали указано число очков, выпавшее на первой кости, по вертикали — на второй.

	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

51. Распределение вероятностей случайной величины

Сумма выпавших очков — случайная величина. Возможные значения этой суммы — натуральные числа от 2 до 12. С помощью таблицы элементарных событий можно вычислить распределение вероятностей между возможными значениями нашей случайной величины.

Вычислим, например, вероятность того, что сумма очков равна 7. Выделим желтым цветом элементарные события, благоприятствующие этому событию. Их 6. Так как в этом опыте 36 равновозможных элементарных событий, вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$. Поэтому вероятность события «сумма очков равна 7» оказывается равна $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

Таким же способом можно вычислить остальные вероятности и заполнить таблицу.

Значение	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Вероятности в таблице для лучшего понимания приведены в виде несокращенных дробей.

Это распределение вероятностей можно представить и в виде диаграммы (см. рис. 1).

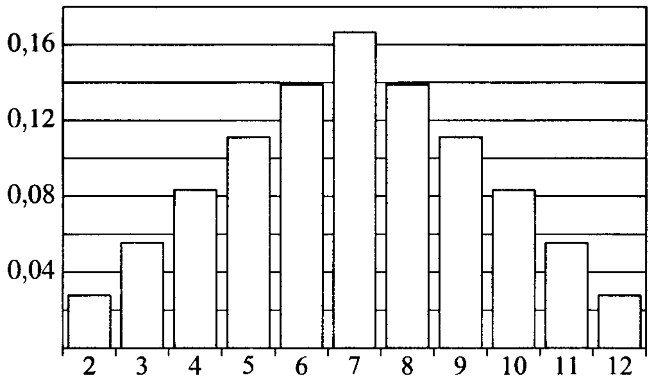


Рис. 1

Высота каждого столбца диаграммы равна вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение.

Основное свойство распределения заключается в том, что **сумма всех вероятностей равна 1.**

Объясняется это тем, что сумма вероятностей значений случайной величины равна сумме вероятностей всех элементарных событий эксперимента.

В природе значения многих случайных величин изменяются непрерывно. Например, время безотказной работы прибора или изделия (телевизора, стиральной машины, автомобиля) может оказаться любым (положительным) числом.

Любым числом может оказаться рост наудачу взятого человека. Можно привести другие примеры. Такие случайные величины называются ***непрерывными***. Для непрерывных случайных величин распределение вероятностей между возможными значениями описывают с помощью функций.

В этом пункте мы познакомились с очень важным понятием — распределением вероятностей случайной величины. Распределение вероятностей показывает, какую вероятность имеет каждое значение случайной величины.

Вопросы

1. Как описывают случайные величины?
2. Чему равна сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины?
3. Всегда ли различные значения случайной величины имеют:

а) равные вероятности;

б) не равные вероятности?

Приведите пример случайной величины, все возможные значения которой имеют равные вероятности.

Приведите пример случайной величины, значения которой не равновероятны.

6*. Приведите примеры непрерывных случайных величин.

Упражнения

1. Задайте с помощью таблицы распределение вероятностей случайной величины X, равной числу орлов, выпавших при:

а) одном; б) двух; в) трех бросаниях монеты.

2. В примере 2 было построено распределение случайной величины «сумма очков при бросании двух игральных костей». Вот это распределение:

Значение	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Проверьте, что сумма всех вероятностей 1.

3. Имеется книжка, в которой 16 страниц. Будем считать, что книга с равными шансами может открыться в любом месте. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины «номер наугад открытой левой страницы».

4. Имеется книжка, в которой 16 страниц. Будем считать, что книга с равными шансами может открыться в любом месте. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины «номер наугад открытой правой страницы».

5. Опыт состоит в бросании двух игральных костей. Заполните таблицу распределения вероятностей и постройте соответствующие диаграммы для случайной величины:

а) «наибольшее из двух выпавших очков»;

б) «наименьшее из двух выпавших очков».

Замечание. Если на костях выпало одинаковое число очков, то это число считается одновременно и наибольшим, и наименьшим.

6. Случайная величина Z принимает все натуральные значения от 1 до 10. Вероятность события $(Z = n)$ равна $\frac{n}{55}$. Составьте таблицу распределения вероятностей. Проверьте, что сумма всех вероятностей равна 1.

7. В таблице дано распределение вероятностей некоторой случайной величины. Одна из вероятностей неизвестна. Найдите ее.

а)

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

б)

Значение	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,05	0,1	0,15	0,18		0,18	0,15	0,1	0,05

8. Распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей

Значение	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Вероятность	0,1	0,04	0,2	0,18	0,05	0,15	0,11	0,1	0,07

Найдите вероятности:

а) $P(1 < X < 2{,}5)$; б) $P(X = 0{,}5$ или $X > 2)$; в) $P(X \geqslant 0{,}4$ или $X = 2{,}5)$;

г) $P(X$ — целое число); д) $P(X$ — дробное число); е) $P(X \neq 2$ и $X \neq 1{,}5)$.

9*. Случайная величина Y принимает все натуральные значения от 1 до 6. При этом $P(Y = n) = \frac{n}{a}$. Найдите a.

52. Биномиальное распределение

Вернемся к уже знакомым нам испытаниям Бернулли. Напомним, что испытанием Бернулли называется случайный эксперимент с двумя возможными исходами — успехом и неудачей. Вероятность успеха обычно обозначают через p, а вероятность неудачи — через q. Очевидно, справедливо равенство $q = 1 - p$.

Напомним также, что вероятность одного какого-нибудь элементарного события, при котором наступает ровно k успехов, равна $p^k q^{n-k}$.

Кроме того, мы знаем, что число элементарных событий, благоприятствующих наступлению k успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли, равно C_n^k.

Пусть случайная величина S — число успехов в серии из n испытаний Бернулли. S может принимать целые значения от 0 до n.

Пусть событие $(S = k)$ состоит в том, что в результате серии испытаний наступило k успехов. Поэтому

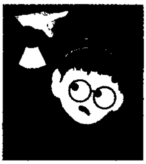
$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эта формула дает распределение случайной величины S.

Определение. Распределение вероятностей случайной величины S называют ***биномиальным распределением***. (Название закрепилось потому, что вероятности $C_n^k p^k q^{n-k}$ — это члены разложения бинома $(p+q)^n$. См. об этом в параграфе 65.)

Пример 1. Биномиальное распределение для $n = 3$ при $p = 0{,}2$.

По формуле $q = 1 - p$ находим, что $q = 0{,}8$.



Тогда

$$\mathrm{P}(S = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}512,$$
$$\mathrm{P}(S = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384,$$
$$\mathrm{P}(S = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096,$$
$$\mathrm{P}(S = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}2^3 \cdot 1 = 0{,}008.$$

Получаем таблицу распределения:

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(S = k)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Убедитесь, что сумма вероятностей в таблице равна единице.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(S=k)$	0	0	0,002	0,009	0,028	0,067	0,122	0,175	0,196	0,175

k	10	11	12	13	14	15	16
$P(S=k)$	0,122	0,067	0,028	0,009	0,002	0	0

Пример 2. Таблица биномиального распределения для $n=16$ при $p=0{,}5$. Как видно из таблицы, распределение вероятностей ***симметрично*** относительно значения 0,196. Это объясняется тем, что вероятности успеха и неудачи одинаковы: $p=q=0{,}5$. Наиболее вероятное значение случайной величины S равно 8. Наглядно форма биномиального распределения для $n=16$ при $p=0{,}5$ показана в виде столбиковой диаграммы на рис. 2.

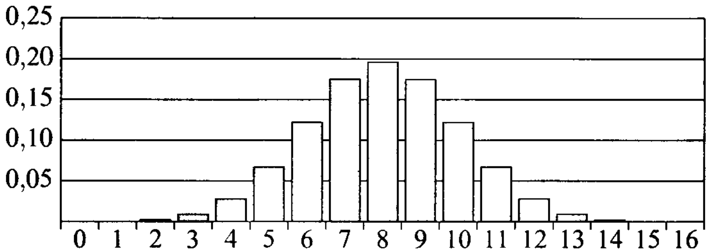


Рис. 2

Пример 3. Еще одно биномиальное распределение. На этот раз для $n=16$ при $p=0{,}25$.

Вычисления в этом примере мы приводить не будем. Вы можете их проверить с помощью калькулятора или электронной таблицы на компьютере.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(S=k)$	0,010	0,053	0,134	0,208	0,225	0,180	0,110	0,052	0,020	0,006

k	10	11	12	13	14	15	16
$P(S=k)$	0,001	0	0	0	0	0	0

В таблице значения округлены до тысячных. Начиная с 11 успехов, все вероятности настолько малы, что округление превратило их в нуль. В результате округления сумма чисел во второй строке таблицы может оказаться чуть больше или меньше единицы.

Интересно посмотреть на диаграмму (рис. 3) этого биномиального распределения. На диаграмме отчетливо видно, что распределение несимметрично. Этого и следовало ожидать в нашем примере, где $p \neq q$. На диаграмме легко увидеть наиболее вероятное значение числа успехов: $S = 4$.

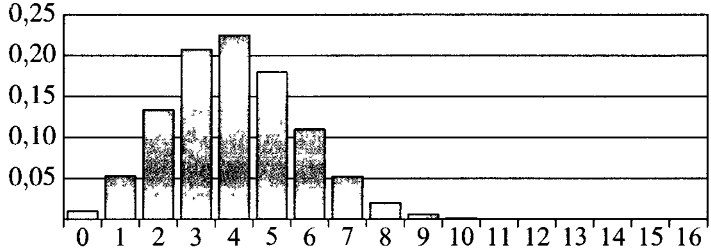
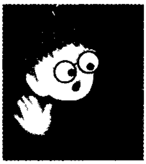


Рис. 3

Теперь мы знаем, что число успехов в серии испытаний Бернулли — это случайная величина, и знаем, какое она имеет распределение.



Вопросы

1. В каком случае биномиальное распределение симметрично?

2. Приведите несколько примеров случайных величин, имеющих биномиальное распределение.

Упражнения

1. Случайная величина X принимает все целые значения от 0 до 18 и имеет симметричное биномиальное распределение. Какое из возможных значений случайной величины X имеет наибольшую вероятность?

2. Проводится серия из 6 независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}5$. Составьте таблицу распределения случайной величины «число успехов». Изобразите распределение вероятностей с помощью диаграммы. Симметрично ли это распределение?

3. Симметрично ли распределение числа успехов в серии испытаний Бернулли, если вероятность успеха: а) $p = 0{,}2$; б) $p = 0{,}7$; в) $p = 0{,}5$? Сравните наиболее вероятное число успехов с серединой интервала значений в каждом случае.

4. Для серии из 6 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$ постройте диаграммы распределения случайных величин «число успехов» и «число неудач». Сравните полученные распределения.

Глава XII. Числовые характеристики случайных величин

Как мы знаем, распределение вероятностей случайной величины — это таблица, в которой указаны значения случайной величины и их вероятности. Для практики не всегда нужно изучать всю таблицу распределения. Достаточно знать некоторые ее числовые характеристики. Мы расскажем о двух наиболее важных из них. Это ***математическое ожидание*** и ***дисперсия***

53. Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим случайную величину X. Ее математическое ожидание обычно обозначают $\mathrm{E}(X)$.

Пусть распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей:

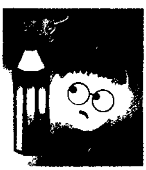
Значение величины X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Определение. ***Математическим ожиданием*** случайной величины X называют число

$$\mathrm{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Математическое ожидание $\mathrm{E}(X)$ называют также ***ожидаемым значением*** случайной величины X, ***средним значением*** случайной величины X.

Если значения случайной величины измеряются в каких-либо единицах (например, рост — в сантиметрах, температура — в градусах), то ее математическое ожидание измеряется в этих же единицах (средний рост — в сантиметрах, средняя температура — в градусах).



Пример. Возьмем в качестве случайной величины X число очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятности выпадения каждой грани одинаковы и равны $\frac{1}{6}$.

Поэтому

$$\mathrm{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Этот пример показывает, что если все значения случайной величины равновероятны, то **математическое ожидание — это просто среднее арифметическое значений.**

Коротко расскажем о применениях математического ожидания при расчете цены лотерейного билета и стоимости страхового полиса.

Лотерея

Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем в 500 р., 10 билетов с выигрышами по 100 р. и остальные 89 билетов без выигрышей. Наудачу выбирают один билет. Найдем математическое ожидание выигрыша.

Эта случайная величина может принимать три значения: 500 р., 100 р. и 0 р. (нет выигрыша). Их вероятности равны 0,01, 0,10 и 0,89.

Математическое ожидание выигрыша равно

$$500 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}10 + 0 \cdot 0{,}89 = 15 \text{ (р.)}.$$

Получается, что средний выигрыш на один билет равен 15 р.

Для того чтобы лотерея приносила доход своим устроителям, цена билета должна быть больше, чем средний выигрыш. Предположим, что билет стоит 20 р. Продав все билеты, устроители лотереи получат 2000 рублей. На выплату выигрышей будет потрачено 1500 рублей. Таким образом, доход от лотереи составит 500 рублей.

Разумеется, может случиться так, что на один купленный нами билет мы получим большой выигрыш. Но если бы некто решил купить все билеты, то он достоверно потерял бы 500 рублей — по 5 на каждый из 100 билетов.

Так устроены все лотереи: математическое ожидание выигрыша на один билет меньше цены этого билета.

Это условие является непременным, и оно обеспечивает рентабельность лотереи и доход ее устроителям. **Человек, который решил сыграть в лотерею, должен понимать это и сознательно рисковать своими деньгами.**

Чем больше математическое ожидание выигрыша, тем больше игр требуется, чтобы устроитель лотереи получил ощутимый доход. Чем меньше математическое ожидание, тем меньше людей привлечет такая игра. Поэтому организаторы лотерей экспериментальным путем определяют наиболее выгодные условия лотереи, придумывают разнообразную рекламу и часто стараются сделать так, чтобы оценить ожидание выигрыша было невозможно.

Это не значит, что игрок не может выиграть. Иногда игроки выигрывают, и даже крупные суммы, но в конечном итоге устроитель лотереи всегда имеет доход. Когда игроков много, одни выигрывают, другие проигрывают, деньги перераспределяются между ними, и при этом бо́льшая часть этих денег достается организатору лотереи.

Если часть средств, вырученных от лотереи, идет на нужды культуры, спорта, на содержание больниц и другие благородные цели, то такие лотереи называются благотворительными. В отделениях Сберегательного банка России можно приобрести билеты самых разных благотворительных лотерей.

На любую лотерею и на любой игральный автомат требуется специальное разрешение (лицензия). Если кто-то устраивает игру на деньги или вещи без лицензии, то это нарушение закона, а сам хозяин такой лотереи, скорее всего, мошенник. В такие игры играть нельзя!

Стоимость полиса обязательного страхования автомобильной гражданской ответственности (ОСАГО)

Полисы ОСАГО, которые должны иметь все владельцы автомобилей, продают страховые компании. Представляя автовладельцу полис, страховая компания берет на себя обязательство возместить ущерб, который этот автовладелец нанесет окружающим в случае дорожно-транспортного происшествия.

Стоимость полиса и пределы выплат были предметом обсуждений в Государственной Думе.

Чтобы определить стоимость полиса, нужно знать две величины: вероятность, с которой в течение года автовладелец может причинить окружающим ущерб в результате дорожного происшествия, и среднюю сумму ущерба. Произведение этих величин дает средний размер страховой выплаты страховой компании на один застрахованный автомобиль.

Для каждого отдельного автомобиля эта выплата является случайной величиной. Математическое ожидание страховой выплаты вместе с прибылью компании и составляет обоснованную стоимость страхового полиса.

В этом пункте мы познакомились со средним значением случайной величины — математическим ожиданием. Еще мы узнали, что математическое ожидание выигрыша играет важную роль при определении цены лотерейного билета, а математическое ожидание страховой выплаты — при определении цены страхового полиса.

Вопросы

1. Что такое математическое ожидание случайной величины?
2. Может ли какое-нибудь значение случайной величины быть положительным, а математическое ожидание этой величины — отрицательным?

3. Как связаны цена билета лотереи и математическое ожидание выигрыша?

Упражнения

1. В таблице дано распределение вероятностей случайной величины Z. Найдите математическое ожидание этой величины.

а)

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$

б)

Значение	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,07	0,1	0,13	0,18	0,04	0,14	0,19	0,12	0,03

в)

Значение	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,02	0,03	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,03	0,02

2. Случайная величина A принимает все целые значения от -15 до 15 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

3. Случайная величина Z принимает все четные целые значения от -8 до 8 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

4. Бросаем симметричную монету один раз. Случайная величина X — «число выпавших орлов». Ясно, что X может принимать только два значения 0 и 1. Найдите $\mathrm{E}(X)$.

5. Найдите математическое ожидание случайной величины Y, которая равна сумме очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости.

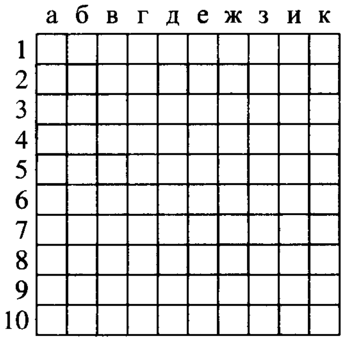


Рис. 1

6. Могут ли все значения случайной величины быть положительными, а ее математическое ожидание отрицательным?

7. Докажите, что математическое ожидание случайной величины не больше, чем наибольшее значение этой случайной величины.

8. Может ли математическое ожидание случайной величины быть меньше всех значений этой случайной величины? Ответ обоснуйте.

9. По правилам морского боя на поле 10×10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трехпалубных и один четырехпалубный (рис. 1).

Рассмотрим случайную величину X, которая равна числу клеток в подбитом корабле противника в результате первого выстрела. Если первый выстрел не привел к попаданию, то $X = 0$. Найдите $\mathrm{E}(X)$.

10*. Случайная величина Y равна:

а) наибольшему числу очков, выпавшему при бросании двух игральных костей;

б) наименьшему числу очков, выпавшему при бросании двух игральных костей.

Найдите $\mathrm{E}(Y)$. При решении воспользуйтесь результатами задачи 5 из п. 51.

Замечание. Если на костях выпало одинаковое число очков, то это число считается и наибольшим, и наименьшим.

11*. Случайная величина X принимает все натуральные значения от 1 до 8. Распределение вероятностей задано формулой $p_n = \frac{n}{36}$. Найдите $\mathrm{E}(X)$.

54. Свойства математического ожидания

Решение некоторых задач предыдущего пункта можно упростить, если воспользоваться свойствами математического ожидания.

Отметим наиболее важные свойства.

Свойство 1. Пусть X — случайная величина, a — некоторое число. Рассмотрим случайную величину $Y = aX$. Тогда

$$\mathrm{E}(Y) = a\mathrm{E}(X).$$

Свойство 2. Пусть U и V — две случайные величины. Тогда $U + V$ — также случайная величина, и при этом:

$$\mathrm{E}(U+V) = \mathrm{E}(U) + \mathrm{E}(V).$$

Это значит, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Пример 1. Вернемся еще раз к сумме числа очков, выпавших на двух игральных костях. Найдем математическое ожидание этой случайной величины. Обозначим число очков, выпавших на первой кости, через U, а на второй — через V. Найдем математическое ожидание случайной величины $S = U + V$. Нам известно, что

$$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(V) = 3{,}5.$$

Следовательно, по свойству 2 мы получаем

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(U) + \mathrm{E}(V) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Используя свойство математического ожидания, мы избежали громоздких вычислений.

Свойство 2 верно и для любого числа слагаемых. Во многих случаях это свойство позволяет вычислять математическое ожидание, не составляя таблицу распределения вероятностей.

Пример 2. В некоторых настольных играх игроки по очереди бросают игральную кость. Фишка игрока передвигается по игровому полю на столько шагов, сколько очков выпало на кости. Спрашивается, как далеко сможет продвинуться игрок, скажем, за десять шагов? Ответить на этот вопрос точно невозможно. Если удастся выкинуть десять шестерок подряд, то можно продвинуться на 60 шагов. Однако 10 шестерок подряд случается крайне редко. Так же редко выпадает и 10 единиц подряд. Скорее всего, за десять бросков на кости выпадут различные значения. Например, результат десяти бросаний кости может выглядеть так:

$$5;\ 6;\ 3;\ 6;\ 4;\ 1;\ 4;\ 6;\ 3;\ 2$$

или так:

$$1;\ 2;\ 6;\ 3;\ 1;\ 3;\ 4;\ 2;\ 2;\ 5.$$

Сумма очков в первой серии из десяти бросков равна 40, а во второй серии сумма равна 29. А можно ли указать, чему эта сумма будет равняться ***в среднем***?

Чтобы найти среднее, нет необходимости кидать игральную кость много раз. Среднее можно рассчитать теоретически как ***математическое ожидание случайной величины.***

Обозначим через $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{10}$ число очков на кости во время каждого броска, а через S — их сумму. Тогда

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_1) = 10 \cdot 3{,}5 = 35.$$

Заметим, что в этом примере полученное число лежит посередине между наименьшим возможным продвижением на 10 шагов и наибольшим возможным на 60.

В этом пункте рассказано о двух важных свойствах математического ожидания.

Вопросы

1. Сформулируйте свойства математического ожидания.

Упражнения

1. Найдите математическое ожидание суммы очков при бросании:

а) 5 игральных костей; б) 7 игральных костей;
в) 100 игральных костей; г) k игральных костей.

2. Случайная величина X имеет математическое ожидание 3, а случайная величина Y — математическое ожидание 4. Найдите $\mathrm{E}(Z)$, где:

а) $Z = X + Y$; б) $Z = X - Y$; в) $Z = 2X$;
г) $Z = 3X + 2Y$; д) $Z = 2X - 3Y - 1$; е) $Z = 5 - 3X$.

3. Случайная величина X принимает целые значения от -3 до 7 с равными вероятностями. Случайная величина Y принимает целые значения от 1 до 9 также с равными вероятностями.

Найдите математическое ожидание случайной величины Z, если:

а) $Z = X + Y$; б) $Z = X - Y$.

4. Проводится лотерея-спринт. Цена одного билета равна 10 рублей. Выигрыши и их вероятности даны в таблице:

Выигрыш	10 р.	50 р.	100 р.	1000 р.	10 000 р.	100 000 р.
Вероятность	0,1	0,02	0,01	0,001	0,0001	0,00001

Найдите математическое ожидание случайной величины «выигрыш на один билет».

5*. Симметричную монету бросили 5 раз. Найдите математическое ожидание числа выпадения орлов.

6*. Проводится серия из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{2}$ при каждом испытании. Найдите математическое ожидание:

а) числа успехов; б) числа неудач.

55. Рассеивание значений. Задача про испытание дозирующих автоматов

На некотором хлебозаводе стоят два одинаковых дозирующих автомата. Каждый автомат должен отмерять порции теста массой 800 г. Однажды инженеры завода решили проверить работу автоматов и взвесили с большой точностью по десять порций, отмеренных каждым автоматом.

Вот результаты испытаний первого автомата:

Номер пробы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса, г	795	791	801	797	804	802	796	796	805	799

А это — результаты испытаний второго автомата:

Номер пробы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса (г)	793	795	795	794	792	794	796	795	793	792

Представим теперь эти результаты наглядно, отметив для каждого автомата полученные значения красными точками на числовой прямой. Каждое значение отметим столько раз, сколько оно встретилось:

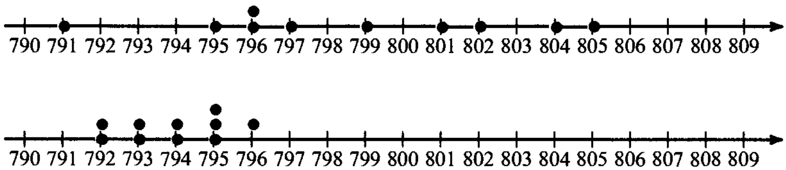


Рис. 2

Получились две диаграммы (рис. 2). Попробуем сделать выводы о состоянии каждого автомата. Результаты работы первого автомата находятся по обе стороны от номинального значения 800 г. Найдем среднее значение массы:

$$\frac{795+791+801+797+804+802+796+796+805+799}{10}=798{,}6.$$

Среднее значение отличается от 800 г всего на 1,4 г.

Результаты испытаний второго автомата совсем иные. Найдем среднее:

$$\frac{793+795+795+794+792+794+796+795+793+792}{10}=793{,}9.$$

Среднее отличается от положенных 800 г на 6,1 г.

Так какой автомат работает лучше? Какой нуждается в ремонте? Казалось бы, с первым автоматом все в порядке — он дает небольшую ошибку. Но инженеры рассудили иначе. На рис. 2 хорошо видно, что порции теста, выдаваемые первым автоматом, сильно разбросаны по прямой. Иными словами, **случайная величина «масса порции» у первого автомата имеет большое рассеивание**. Это, скорее всего, вызвано большим износом деталей, так что первый автомат требует серьезного ремонта или даже замены.

А вот за второй автомат инженеры остались спокойны, — нужна небольшая регулировка, которая приведет среднее значение к нужной величине. А разброс второй автомат дает небольшой, что говорит о хорошем состоянии механизмов в целом.

В этом примере среднее значение оказалось не самым главным показателем. Более важную роль играло постоянство значений, их кучность.

Когда говорят о том, что средние показатели вроде бы хорошие, но на самом деле ничего не показывают, часто употребляют меткое выражение «средняя температура по больнице нормальная». Это очень красочный пример бессмысленности среднего показателя в некоторых случаях: у одного больного температура 40°, у другого — 33,2°, оба при смерти, а их средняя температура нормальная — 36,6°. И кажется, что все здоровы.

Теперь сделаем общие выводы. Чтобы судить о поведении случайной величины, мало знать ее математическое ожидание. Нужна числовая характеристика для *рассеивания* или *разброса* ее значений. В теории вероятностей в качестве меры разброса используют дисперсию случайной величины.

Этот пункт посвящен рассказу о том, почему кроме среднего нужно знать разброс, и приводится пример, когда разброс более важен, чем среднее значение.

56. Дисперсия и стандартное отклонение

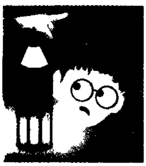
Наиболее употребительной мерой рассеивания случайной величины является *дисперсия*.

Определение. *Дисперсией* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X - \mathrm{E}(X))^2$.

Обозначают дисперсию случайной величины через $\mathrm{D}(X)$. Итак, по определению

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2).$$

Очевидно, что $\mathrm{D}(X) \geqslant 0$. Чем меньше дисперсия, тем более кучно значения случайной величины группируются около математического ожидания $\mathrm{E}(X)$. Если же $\mathrm{D}(X) = 0$, то случайная величина X принимает единственное значение. В таком случае говорят, что случайная величина постоянна.



Пример. Найдем дисперсию случайной величины X «число очков при однократном бросании игральной кости».

Решение. Известно, что $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$. Построим распределение случайной величины $X - \mathrm{E}(X)$:

Значение	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда

$$\mathrm{D}(X)=\frac{1}{6}\left((-2{,}5)^2+(-1{,}5)^2+(-0{,}5)^2+0{,}5^2+1{,}5^2+2{,}5^2\right)=$$
$$=\frac{1}{6}(6{,}25+2{,}25+0{,}25+0{,}25+2{,}25+6{,}25)\approx 2{,}917.$$

У дисперсии также есть недостаток: дисперсия измеряется не в тех единицах, что сама случайная величина. Например, если случайная величина X — расстояние, то она измеряется в метрах. В этом случае $\mathrm{D}(X)$ будет измеряться в квадратных метрах.

А если X — напряжение и измеряется в вольтах? Тогда дисперсию $\mathrm{D}(X)$ придется измерять в квадратных вольтах?..

По этой причине вместо дисперсии часто используется мера рассеивания, которая называется ***средним квадратичным*** или ***стандартным отклонением*** и равна арифметическому квадратному корню из дисперсии. Стандартное отклонение часто обозначают греческой буквой σ (сигма).

$$\sigma=\sqrt{\mathrm{D}(X)}.$$

В рассмотренном примере стандартное отклонение $\sigma\approx\sqrt{2{,}917}\approx 1{,}71$.

В этом пункте мы узнали, что дисперсия случайной величины — это средний квадрат отклонения от математического ожидания. Дисперсия показывает разброс значений случайной величины. Еще мы узнали, что такое стандартное отклонение.

57. Свойства дисперсии

В предыдущем пункте мы установили, что дисперсия является характеристикой рассеивания случайной величины. Дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right).$$

Существует еще одна формула для вычисления дисперсии, которая обычно удобнее:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X).$$

Выведем эту формулу:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right)=\mathrm{E}(X^2-2X\cdot\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}^2(X)).$$

По свойству 2 (с. 193) математического ожидания получаем

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(2X\mathrm{E}(X))+\mathrm{E}(\mathrm{E}^2(X)).$$

Заметим, что $\mathrm{E}(X)$, $2\mathrm{E}(X)$ и $\mathrm{E}^2(X)$ — постоянные числа. Применив свойство 1 математического ожидания, получим

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}^2(X)=\mathrm{E}(X^2)-2\mathrm{E}^2(X)+\mathrm{E}^2(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X).$$

Вывод окончен.

Отметим два наиболее важных свойства дисперсии.

Свойство 1. Пусть X — случайная величина. Рассмотрим случайную величину $Y=aX$, где a — некоторое число. Тогда

$$\mathrm{D}(Y)=a^2\mathrm{D}(X).$$

Свойство 2. Пусть X — случайная величина. Рассмотрим случайную величину $Y=X+a$. Тогда

$$\mathrm{D}(Y)=\mathrm{D}(X).$$

В этом пункте мы нашли способ вычислять дисперсию по более простой формуле и познакомились с двумя свойствами дисперсии.

Вопросы

1. Что такое дисперсия случайной величины?
2. Что такое стандартное отклонение? Чем дисперсия отличается от стандартного отклонения?
3. Запишите в тетради и выучите формулы для вычисления дисперсии.
4. Сформулируйте свойства дисперсии.
5. Результат стрельбы в тире зависит от пристрелянности ружья и меткости стрелка. Двое стреляют в тире в одинаковые круглые мишени. Каждый делает по 10 выстрелов. Результаты стрельбы показаны на рис. 3.

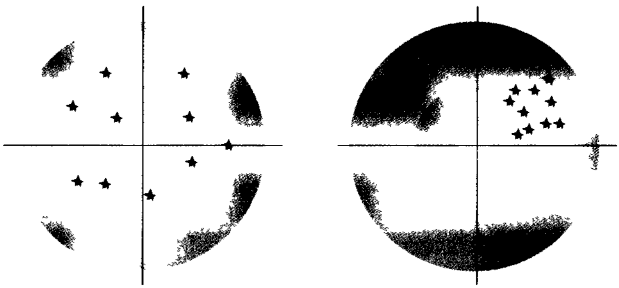


Рис. 3

Какие выводы можно сделать, рассматривая эти мишени? Сформулируйте свои предположения относительно состояния ружей и искусства стрелков.

Упражнения

1. Проводится одно испытание Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Случайная величина S — «число успехов». Вычислите $\mathrm{D}(S)$.

2. Проводится одно испытание Бернулли с вероятностью успеха p. Случайная величина S — «число успехов». Вычислите $\mathrm{D}(S)$.

3. Дано распределение случайной величины X:

а)

Значения	−2	0	3
Вероятность	0,3	0,5	0,2

б)

Значения	−2	2	3
Вероятность	0,3	0,5	0,2

Вычислите дисперсию этой случайной величины.

4. Дано распределение случайной величины X:

а)

Значения	−2	0	1	3
Вероятность	0,3	0,3	0,3	0,1

б)

Значения	−2	0	1	5
Вероятность	0,1	0,1	0,2	0,6

Вычислите дисперсию этой случайной величины.

5. Дано распределение случайной величины Y:

Значения	−1	1	4
Вероятность	0,3	0,5	0,2

Вычислите дисперсию этой случайной величины. Сравните случайную величину Y со случайной величиной X из задачи 3 а). Сравните дисперсии этих случайных величин.

6. Дано распределение случайной величины Z:

Значения	−4	0	6
Вероятность	0,3	0,5	0,2

Вычислите дисперсию этой случайной величины. Сравните случайную величину Z со случайной величиной X из задачи 3 а). Сравните дисперсии этих случайных величин.

7. Найдите дисперсию случайной величины, которая с равными вероятностями принимает все целые значения:

а) от 0 до 6; б) от 1 до 7.

8. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найдите $\mathrm{D}(Y)$, где:

а) $Y = 3X$; б) $Y = X + 5$; в) $Y = -4X$;

г) $Y = 2X - 1$; д) $Y = 5 - 3X$; е) $Y = -5X - 7$.

9. Найдите дисперсию случайной величины «сумма очков при двукратном бросании игральной кости».

58. Математическое ожидание числа успехов в серии испытаний Бернулли

Если S — число успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, то

$$\mathrm{E}(S) = np.$$

Докажем это утверждение. Найти $\mathrm{E}(S)$ по определению оказывается весьма непросто. Проще пойти обходным путем, используя свойства математического ожидания.

Обозначим число успехов в первом испытании через X_1. В одном испытании результатов может быть только два — либо успех с вероятностью p, либо неудача с вероятностью q. Поэтому X_1 принимает всего лишь два значения 0 и 1 с вероятностями q и p соответственно.

Число успехов во втором испытании обозначим через X_2. И снова ясно, что X_2 принимает значения 0 и 1 с теми же вероятностями q и p.

Точно так же поступим для каждого из n испытаний. Пусть X_i — число успехов в испытании с номером i. Составим таблицу распределения для X_i:

k	0	1
$\mathrm{P}(X_i = k)$	q	p

Математическое ожидание $\mathrm{E}(X_i)$ найти несложно:

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Общее число успехов при n испытаниях складывается из числа успехов при каждом испытании:

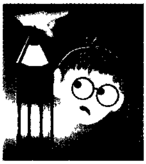
$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n.$$

По свойству 2 математического ожидания (см. с. 193) получаем

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_n),$$

откуда

$$\mathrm{E}(S) = \underbrace{p + p + p + \ldots + p}_{n \text{ раз}} = np.$$



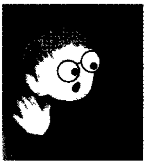
Пример. Найдем ожидаемое среднее число удач при $n = 20$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$ в одном испытании.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\mathrm{E}(S) = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8.$$

Полученный результат вполне ожидаем: если в среднем наступает 4 успеха в 10 попытках, то в среднем должно быть 8 успехов в 20 попытках.

В этом пункте мы узнали, зачем нужны свойства математического ожидания, и применили их для вычисления математического ожидания числа успехов в серии испытаний Бернулли.



Вопросы

1. Вспомните и запишите в тетради формулу вероятности k успехов при n испытаниях.

2. Чему равно ожидаемое число успехов при вероятности успеха $p = \frac{1}{2}$ в серии из 20 испытаний? Подбросьте двадцать раз монету, считая успехом выпадение орла. Подсчитайте число наступивших успехов. Совпало ли число успехов с ожидаемым значением?

3. Выберите правильное утверждение:

а) чем больше вероятность успеха, тем больше ожидаемое число неудач;

б) чем больше вероятность успеха, тем меньше ожидаемое число неудач;

в) ожидаемое число успехов зависит только от числа экспериментов и никак не связано с вероятностью неудачи в каждом опыте.

Упражнения

1. В пруду 2000 окуней и 1000 карасей. Рома ловит рыбу, но каждую пойманную рыбу отпускает снова в пруд. Найдите ожидаемое число карасей, если всего Рома поймал 30 рыб.

2. По полу рассыпали содержимое коробки, в которой лежало сто канцелярских кнопок. Сколько следует ожидать «опасных»

кнопок, лежащих острием вверх, если вероятность выпадения кнопки острием вверх равна 0,45?

3. Игральную кость бросили 120 раз. Найдите ожидаемое число наступления события:

а) «число очков кратно 3»; б) «выпала пятерка».

4. В тесте из 16 задач каждая задача снабжена 4 вариантами ответа, но только один ответ из четырех верный. Миша не готов к тесту и выбирает ответы наугад. Найдите ожидаемое число правильных ответов, которые Миша угадает.

5. Канцелярскую кнопку бросают на стол 300 раз. Известно, что математическое ожидание случайной величины «число выпадений острием вверх» равно 135. Найдите вероятность события «кнопка упала острием вверх».

59. Дисперсия числа успехов

Дисперсия числа успехов S в серии из n испытаний Бернулли вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}(S) = npq.$$

Выведем эту формулу тем же способом, что и формулу математического ожидания.

Опять воспользуемся тем, что $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Поскольку отдельные испытания Бернулли независимы, значения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ также независимы в том смысле, что не оказывают влияния друг на друга.

Верно свойство: дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$\mathrm{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{D}(X_1) + \mathrm{D}(X_2) + \mathrm{D}(X_3) + \ldots + \mathrm{D}(X_n).$$

Поэтому достаточно найти дисперсии для каждого испытания и затем сложить их. Воспользуемся формулой

$$\mathrm{D}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}^2(X_i).$$

Случайная величина X_i^2 принимает те же значения 0, 1, что и X_i. Поэтому распределение у нее такое же. И математическое ожидание такое же:

$$\mathrm{E}(X_i^2) = \mathrm{E}(X_i) = p.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Следовательно,

$$D(S) = \underbrace{pq + pq + pq + \ldots + pq}_{n \text{ раз}} = npq.$$

Мы рассказали еще об одном свойстве дисперсии для независимых случайных величин. Пользуясь этим свойством и уже известными нам свойствами дисперсии, мы смогли вычислить дисперсию числа успехов в серии испытаний Бернулли.

Вопросы

1. Почему распределения величин X_1^2 и X_1 совпадают?

2. Увеличивается или уменьшается дисперсия числа успехов при увеличении числа испытаний Бернулли?

3. Чему равна дисперсия случайной величины «число неудач» в серии из n испытаний Бернулли.

Упражнения

1. По полу рассыпали содержимое коробки, в которой лежало сто кнопок. Кнопка падает острием вверх с вероятностью 0,36. Найдите дисперсию и стандартное отклонение величины «число кнопок, упавших острием вверх».

2. Игральную кость бросили 13 500 раз. Рассмотрим случайную величину X, равную числу бросков, при которых:

а) выпавшее число очков кратно 3; б) выпала пятерка.

Найдите $D(X)$.

3. Производится серия выстрелов по мишени. Вероятность попадания равна $p = 0{,}3$. Подсчитывается число попаданий S. Найдите дисперсию величины S, если всего произведено

а) 100 выстрелов; б) 1000 выстрелов; в) 2500 выстрелов.

4*. Докажите, что верно неравенство $D(S) \leqslant \frac{1}{4}n$, где $D(S)$ — дисперсия случайной величины «число успехов» в серии из n испытаний Бернулли. При какой вероятности успеха p выполняется равенство $D(S) = \frac{1}{4}n$?

Глава XIII. Случайные величины в статистике

60. Измерения вероятностей

Когда говорят о бросании симметричной монеты, предполагают, что вероятность появления герба равна $\frac{1}{2}$; говоря о бросании игральной кости, предполагают, что вероятность выпадения любой из шести граней равна $\frac{1}{6}$. В других случаях тоже часто делают подобные предположения о вероятностях. Например, предполагают, что день рождения наудачу взятого человека с равными шансами может приходиться на любой день года.

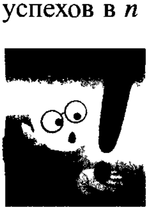
Но в большинстве случаев вероятности событий неизвестны.

Владельца магазина интересует вероятность того, что клиент совершит покупку. Покупателя, приобретающего телевизор или стиральную машину, интересует их надежность, т. е. вероятность того, что купленная вещь прослужит хотя бы пять лет.

Узнать или измерить нужные нам вероятности в этих случаях мы не можем. Прибора для прямого измерения вероятностей нет.

Но косвенный путь к измерению вероятностей есть. Он основан на испытаниях Бернулли и свойствах математического ожидания и дисперсии.

Предположим, что нас интересует вероятность определенного события; назовем его событием A. В результате некоторого опыта событие A либо происходит, либо нет. Предположим, что мы можем проводить этот опыт ***многократно*** и ***независимо***. Во всех этих опытах нас интересует только, произошло событие A или нет. Поэтому эти опыты являются испытаниями Бернулли, в которых успех — это осуществление события A. Вероятность этого успеха равна p. Допустим, что мы провели n опытов и событие A наступило S раз, т. е. S — число успехов в n испытаниях Бернулли.



Определение. ***Частотой*** события A (т. е. частотой успеха) называют дробь $\frac{S}{n}$.

Иными словами, частота $\frac{S}{n}$ — это доля опытов, закончившихся успехом, среди всех проведенных опытов.

Теорема. Частота $\frac{S}{n}$ события A при большом числе опытов n приближенно равна вероятности события A.

Доказательство основано на том, что математическое ожидание числа успехов равно вероятности p события A:

$$\mathrm{E}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(S) = \frac{1}{n}np = p,$$

а дисперсия $\mathrm{D}\left(\frac{S}{n}\right)$ мала. Проверим это. Мы знаем, что $\mathrm{D}(S) = npq$. По свойству 1 (см. с. 199) дисперсии

$$\mathrm{D}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}(S) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{qp}{n}.$$

Полученное значение уменьшается с ростом n.

Если дисперсия случайной величины мала, то эта случайная величина мало отличается от своего математического ожидания. Более точно: **мала вероятность того, что случайная величина примет значение, заметно отличающееся от математического ожидания.** В данном случае это означает, что частота $\frac{S}{n}$ близка к вероятности p наступления события A, когда число опытов велико. Чем больше n, тем частота ближе к вероятности.

Экспериментальные проверки близости частоты и вероятности проводились неоднократно с бросанием монеты, игральной кости и в других опытах. Они показали, что частоты и вероятности действительно близки друг к другу, если число опытов достаточно велико. Приведем в таблице несколько опытов, проведенных исследователями в прошлом.

	Число бросаний	Число выпавших орлов
Опыт Керриха	10 000	5087
Опыт Пирсона	24 000	12 012
Опыт Бюффона	4040	2048

Пользуясь свойствами дисперсии, мы доказали очень важный факт: при большом числе испытаний Бернулли частота успеха близка к вероятности. Кроме того, мы узнали, что экспериментальную проверку этого факта неоднократно проводили в прошлом.

Практическое задание

Цель исследования. Проверить экспериментально близость частоты и вероятности в серии испытаний Бернулли, состоящих в 300 бросаниях симметричной монеты.

Ход исследования.

1. Приготовьте 10 обычных монет любого достоинства и пластиковый стакан.
2. Подготовьте место на столе. Чтобы избежать сильного звона, стол можно чем-нибудь застелить.
3. Заготовьте на тетрадном листе бланк для записи хода эксперимента.

Эксперимент «Проверка близости частоты и вероятности при бросаниях монеты»

Число опытов: 30. Каждый раз бросается 10 монет.
Число бросаний: $n = 300$.
Вероятность орла: $p = 0{,}5$.

Номер бросания	Число выпавших орлов
1	
2	
....	
30	
Всего:	

Число выпадений орла: $S =$
Частота выпадения орла: $\frac{S}{n} =$
Отклонеиие частоты от вероятности: $d = \left|\frac{S}{n} - 0{,}5\right| =$
Стандартное отклонение: $\sigma \approx 0{,}029$.
Результаты сравнения d и 3σ: больше число:
Вывод:

4. Встряхнув монеты в стакане, выбросьте их из стакана на стол. Не нужно слишком сильно размахиваться, чтобы монеты не рассыпались по полу. Число выпавших орлов занесите в таблицу.

5. Повторите этот опыт еще 29 раз, каждый раз записывая в таблицу результат.

Анализ результатов.

Если отклонение частоты от вероятности не превосходит 3 стандартных отклонений, то можно считать, что гипотеза о близости частоты и вероятности подтверждается. Проверим это.

1. В последнюю строку таблицы запишите общее число выпавших гербов S, сложив числа, стоящие во втором столбце таблицы.

2. Общее число бросаний монеты n равно 300. Найдите частоту выпадения орла по формуле $\frac{S}{n}$.

3. Сравните полученное число с вероятностью $p = 0{,}5$. Найдите отклонение частоты от вероятности по формуле

$$d = \left|\frac{S}{n} - 0{,}5\right|.$$

4. Вычислим стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\left(\frac{S}{n}\right)}$. Получаем:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{300}} \approx 0{,}029.$$

Тогда $3\sigma \approx 0{,}087$. Сравните d и полученное число 0,087. Сделайте вывод, близка ли частота к вероятности.

Примечание. Вы можете взять n не 300, а больше. При этом следует внести соответствующие изменения в бланк и в расчет стандартного отклонения.

61. Точность приближения

Если число испытаний невелико, то различие между частотой и вероятностью может быть весьма значительным. Поэтому нельзя судить о вероятности некоторого события, проведя мало опытов.

Теория вероятностей не только утверждает, что при большом числе n испытаний Бернулли частота $\frac{S}{n}$ близка к вероятности p, но и позволяет оценить точность этого приближения. Когда мы собираемся использовать $\frac{S}{n}$ вместо неизвестной вероятности p, мы хотим, чтобы отклонение между ними $\left|\frac{S}{n} - p\right|$ было малым.

Предположим, что нас устроит измерение p с точностью 0,05. Такая точность достигается, если в результате серии испытаний происходит событие

$$\left|\frac{S}{n} - p\right| \leqslant 0{,}05.$$

Если вероятность этого события близка к 1, мы считаем достоверным, что частота $\frac{S}{n}$ отличается от p не больше чем на 0,05.

Теория вероятностей позволяет выбрать n так, чтобы вероятность события

$$\left|\frac{S}{n} - p\right| \leqslant 0{,}05$$

оказалась больше чем 0,95 или больше 0,99 или другого наперед заданного значения.

Например, при $n \geqslant 400$ вероятность того, что $\left|\frac{S}{n} - p\right| \leqslant 0{,}05$, больше чем 0,95.

Можно потребовать более точное измерение вероятности, скажем, с точностью до 0,03. При $n \geqslant 1850$ событие $\left|\frac{S}{n} - p\right| \leqslant 0{,}03$ имеет вероятность больше чем 0,99.

Мы и раньше знали, что в серии испытаний Бернулли частота успеха близка к вероятности. Оказывается, мы можем узнать, сколько нужно провести испытаний, чтобы частота успеха была близка к вероятности настолько, насколько нам это нужно.

62. Социологические обследования

Мы знаем, что при большом числе испытаний Бернулли частота успеха близка к его вероятности. Этот результат важен для социологических обследований, которые проводятся с различными целями.

Предположим для определенности, что нас интересует, какова доля избирателей, готовых поддержать на будущих выборах кандидата К. С нашей точки зрения упомянутая доля — это вероятность p того, что наудачу выбранный избиратель окажется сторонником кандидата К. Хорошо бы опросить всех избирателей и узнать, сколько из них поддерживает кандидата К. Но, к сожалению, до выборов это невозможно. Кроме того, люди не обязаны отвечать на вопросы о своих политических симпатиях.

Вместо того чтобы опрашивать всех, опрашивают небольшую группу избирателей. Эта группа называется ***выборкой***

Важно, чтобы выборка правильно представляла всю совокупность избирателей. Оказывается, нет лучшего способа добиться такого сходства, чем составлять выборку ***случайно***.

Численность выборки обозначим через n. Результат опроса каждого человека в выборке назовем успехом, если он высказался в пользу кандидата К. В противном случае будем считать результат неудачей. Вероятность успеха, как мы предположили выше, равна p. Безусловно, в процессе опроса вероятность несколько меняется, поскольку часть людей из выборки уже опрошена. Но выборка настолько мала по сравнению с общей численностью избирателей, что эти изменения вероятности несущественны. Поэтому можно считать, что **моделью социологического обследования является серия из n независимых испытаний Бернулли**.

Обозначим через S число успехов, т. е. число участников выборки, которые поддержали кандидата К. Тогда доля сторонников кандидата К в этой выборке равна $\frac{S}{n}$.

Как мы уже знаем, $p \approx \frac{S}{n}$, если n достаточно велико. Как уже было сказано, если $n \geqslant 1850$, то точность достигает 3 %. Бóльшая точность обычно не требуется.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть мы опросили $n = 2000$ человек, выбранных случайным образом среди всех групп избирателей в разных регионах России, и установили, что $S = 340$ из них являются сторонниками кандидата К. Тогда $\frac{S}{n} = \frac{340}{2000} = 0{,}17$.

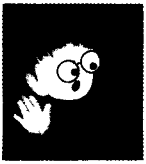
Нужно положить $p = 0{,}17$ — это приблизительная вероятность того, что наудачу взятый избиратель в России является сторонником кандидата К. Это то же самое, что около 17 % избирателей в России — приверженцы кандидата К.

При этом практически достоверно, что истинная процентная доля избирателей — приверженцев кандидата К отличается от 17 % меньше чем на 3 % в ту или иную сторону.

В отчетах о социологических опросах обычно сообщается не только приближенное значение p, но также точность приближения и численность выборки. И хотя выборки бывают разными, обычная их численность — около 2000 человек. Теперь мы знаем, почему.

Подчеркнем важную особенность метода: **численность выборки, обеспечивающей нужную точность выводов, не связана с численностью обследуемой совокупности.**

В этом пункте приведен пример того, зачем нужны испытания Бернулли в жизни государства и общества. Оказывается, с их помощью можно проводить социологические обследования, которые позволяют строить прогнозы и предположения. Попутно мы поговорили о том, что такое выборка и какой она должна быть.



Вопросы

1. Что такое выборка в социологических обследованиях?

2. Нужно ли знать общую численность всех жителей России, чтобы с помощью выборочного метода установить, какая доля жителей предпочитает по утрам чай, а какая — кофе?

3. От чего зависит точность результата при социологическом обследовании выборочным методом?

4. Можно ли сделать надежный вывод о том, сколько девятиклассников в России захотят сдавать экзамен по истории, если опросить 100 случайным образом выбранных школьников? Если опросить 2000 девятиклассников из 20 школ одного города?

63. Закон больших чисел

Закон больших чисел — название собирательное. Так называют математические теоремы, которые при разных условиях утверждают, что среднее арифметическое, составленное из большого числа случайных слагаемых, мало отличается от математического ожидания этого среднего арифметического.

В качестве примера закона больших чисел мы приведем следующее утверждение.

Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение, и пусть a — общее для всех них математическое ожидание.

Тогда при достаточно больших n выполняется приближенное равенство

$$\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{n} \approx a.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

Доказательство этого утверждения основано на свойствах математических ожиданий и дисперсий. Заметим, что одинаково распределенные случайные величины имеют не только общее математическое ожидание, но и общую дисперсию. Обозначим ее через b:

$$\mathrm{D}(X_1) = \mathrm{D}(X_2) = \mathrm{D}(X_3) = \ldots = \mathrm{D}(X_n) = b.$$

По свойствам математического ожидания

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)+\mathrm{E}(X_3)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a.$$

По свойству дисперсии

$$\mathrm{D}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{\mathrm{D}(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{n^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)+\mathrm{D}(X_3)+\ldots+\mathrm{D}(X_n)}{n^2}=\frac{nb}{n^2}=\frac{b}{n}.$$

Мы видим, что при больших значениях n дисперсия среднего арифметического, которое тоже является случайной величиной, мала. Поэтому эта случайная величина не может сильно отличаться от своего математического ожидания, т. е. от a. Чем меньше дисперсия, тем меньше случайный разброс около ожидаемого значения, т. е. меньше вероятность большого отклонения от ожидаемого значения. Иными словами, чем больше n, тем меньше значения случайной величины $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ отличаются от a.

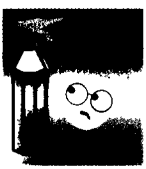
Связь выборочного среднего и математического ожидания

Закон больших чисел позволяет нам вместо математического ожидания с большой точностью использовать средние значения, полученные в результате измерений или наблюдений.

Нам неизвестно распределение большинства случайных величин, которые встречаются в социологических исследованиях, измерениях, наблюдениях. Поскольку мы не знаем распределение, мы не можем знать и математическое ожидание этой случайной величины. Мы не знаем математическое ожидание, но зато можем его оценить.

Если мы произвели достаточно много наблюдений случайной величины, то можем найти среднее арифметическое полученной выборки, т. е. среднее выборочное.

Среднее выборочное используется как приближенное значение математического ожидания.



Пример. Мы не знаем точно распределение, которому подчиняется размер горошин. Поэтому, строго говоря, мы не знаем ожидаемый размер средней горошины. Но мы можем произвести много измерений и найти среднее арифметическое. Возьмем 1000 горошин какого-то определенного сорта, выращенного в определенных условиях. Измерим диаметр каждой горошины с точностью до 0,25 мм и результаты занесем в таблицу:

Диаметр горошины, мм	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
Число горошин	17	91	238	310	228	100	16

Среднее арифметическое равно

$$\frac{5{,}5\cdot17+6\cdot91+6{,}5\cdot238+7\cdot310+7{,}5\cdot228+8\cdot100+8{,}5\cdot16}{1000}=7{,}0025\ (\text{мм}).$$

Полученное среднее значение является оценкой математического ожидания случайной величины «диаметр горошины». При этом мы знаем, что чем больше измерений сделано, тем меньше дисперсия среднего арифметического, а значит, тем больше точность наших выводов. Иными словами, закон больших чисел дает нам уверенность в том, что диаметр 7,0025 мм очень близок к среднему диаметру для всех горошин этого сорта, выращенных в сходных условиях.

В этом примере мы измеряли разные горошины и каждую по одному разу. Иногда, чтобы получить бóльшую точность, одну и ту же величину измеряют несколько раз. Тогда говорят о ***повторных измерениях***.

Повторные измерения

Предположим, что нам надо с большой точностью измерить некую величину a и что наш измерительный прибор несовершенен, а поэтому измерения сопровождаются ошибками. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты нескольких независимых измерений величины a с помощью этого прибора. (Например, a — масса, а измерительный прибор — это весы; или a — расстояние до удаленного предмета, а измерительный прибор — это дальномер.)

Можно считать, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные значения одной случайной величины X, а можно рассуждать иначе и считать, что x_1 — значение случайной величины X_1, x_2 — значение случайной величины X_2 и т. д., при этом все эти величины, по сути, совпадают с величиной X, и поэтому имеют одно и то же неизвестное нам распределение.

Предположим также, что наш измерительный прибор правильно настроен, его шкала не сдвинута. В этом случае говорят, что в измерениях отсутствует **систематическая ошибка**. Тогда результаты измерения колеблются около истинного значения величины a.

Математически это выражается равенствами

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=\ldots=\mathrm{E}(X_n)=a.$$

Дисперсию каждой случайной величины обозначим через b:

$$\mathrm{D}(X_1)=\mathrm{D}(X_1)=\ldots=\mathrm{D}(X_1)=b.$$

При этих условиях, как мы видели,

$$a = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) \quad \text{и} \quad \mathrm{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{b}{n}.$$

Мы видим, что дисперсия среднего арифметического в n раз меньше, чем дисперсия отдельного измерения. Поэтому случайные колебания среднего арифметического тем меньше, чем больше n.

Следовательно, $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \approx a$, и точность приближения тем больше, чем больше n.

Иными словами, в силу закона больших чисел среднее арифметическое независимых повторных измерений близко к истинному значению измеряемой величины, и чем больше измерений, тем больше точность.

Поэтому **усреднение измерений увеличивает достигаемую точность**. Людям это хорошо известно. Каждый из нас знает, что если что-то надо измерить поточнее, лучше измерить это несколько раз. При этом даже не обязательно вычислять среднее арифметическое. Можно найти, например, медиану. Результат и в этом случае, скорее всего, будет более точным, чем при одном измерении. В общем, нужно действовать по поговорке: «Семь раз отмерь — один отрежь».

Мы рассказали о законе больших чисел и о том, что он связывает среднее арифметическое выборки значений случайной величины и математическое ожидание этой величины. Кроме того, мы показали, что среднее значение большого числа измерений почти наверняка точнее, чем результат каждого отдельного измерения.

Вопросы

1. Что такое закон больших чисел?
2. Как оценивают математическое ожидание случайной величины?
3. Что такое повторные измерения?
4. Как можно увеличить точность измерений?

Приложение

64. Числа сочетаний C_n^k

Когда мы решали задачи на перечисление комбинаций различных предметов (п. 43), мы пользовались числами C_n^k и $n!$ для подсчета чисел сочетаний и перестановок. Число C_n^k показывает, сколько существует способов выбрать k предметов из n имеющихся предметов. Известна формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Найдем более простой способ для вычисления C_n^k. Рассуждать будем на примере числа C_{10}^4. Пусть есть 10 предметов. Выберем по очереди 4 из них. На первое место можно поставить любой предмет из 10 имеющихся. На второе место — один из 9 оставшихся, на третье — один из 8, на последнее — четвертое — один из оставшихся 7 предметов.

Всего получается $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ способов выбрать 4 предмета в определенной последовательности. Но некоторые последовательности будут отличаться только порядком предметов. Сколько всего получилось одинаковых наборов из 4 предметов? Очевидно, из столько, сколько существует перестановок 4 предметов, то есть $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Поэтому число различных наборов в $4!$ раз меньше, чем $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Получаем, что

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

откуда $C_{10}^4 = 210$. Такое же рассуждение годится и в общем случае.

Чтобы найти C_n^k, нужно перемножить k натуральных чисел, взятых в порядке убывания, начиная с числа n, и результат разделить на $k!$.

Примеры

1. $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$; 2. $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$;

3. $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$; 4. $C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.

К сожалению, описанное правило не годится для вычисления C_n^0. Но это и не требуется, поскольку известно, что $C_n^0 = 1$.

Упражнения

1. Вычислите:

а) C_3^1, C_3^2, C_3^3; б) $C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4$;

в) $C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5$; г) $C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$.

2*. Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

65. Формула бинома Ньютона

Из курса алгебры хорошо известна формула квадрата суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + a^2,$$

которая применяется для возведения в квадрат суммы двух слагаемых. Существует ли формула для возведения двучлена $a+b$ в более высокие степени, например, в куб или в четвертую степень? Оказывается, такая формула существует.

Выведем формулу ***куба суммы***:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b).$$

По правилу умножения многочленов, нужно сложить всевозможные произведения, каждое из которых состоит из трех множителей, взятых по одному из каждой скобки. Получается 8 слагаемых. Их можно написать в любом порядке. Один из вариантов показан здесь:

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

Зададимся вопросом: сколько в полученной сумме слагаемых, в которых два множителя a и один множитель b? Очевидно, таких слагаемых столько, сколько есть способов выбрать из трех скобок две скобки, из которых взят множитель a. Число таких способов равно $C_3^2 = 3$. Все эти слагаемые можно выписать непосредственно: aab, aba и baa.

Ясно, что так же можно рассуждать для любых других комбинаций множителей. Таким образом, слагаемое a^3 всего одно, поскольку $C_3^3 = 1$, слагаемых вида a^2b всего $C_3^2 = 3$, слагаемых ab^2 всего $C_3^1 = 3$ и слагаемое b^3 всего одно, поскольку $C_3^0 = 1$.

Мы получили формулу куба суммы:

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^2a^2b + C_3^1ab^2 + C_3^0b^3.$$

Заменим каждое число сочетаний числовым значением:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

65. Формула бинома Ньютона

Таким же способом можно получить формулу для возведения $a+b$ в произвольную натуральную степень n.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ раз}}.$$

Если мы раскроем все скобки, то получим сумму 2^n слагаемых, каждое из которых является произведением n множителей a и b, взятых по одному из каждой скобки. Например,

$$\underbrace{aaa\ldots aa}_{n \text{ множителей}}, \quad \underbrace{aaa\ldots ab}_{n \text{ множителей}} \quad \text{или} \quad \underbrace{aaa\ldots aba}_{n \text{ множителей}} \quad \text{и т. п.}$$

Предположим, что в некотором таком произведении ровно k множителей a. Тогда в этом произведении множитель b встречается $n-k$ раз. Поэтому произведение можно записать в виде одночлена

$$a^k b^{n-k}.$$

Осталось выяснить, сколько раз в написанной сумме встречается одночлен $a^k b^{n-k}$. Очевидно, столько, сколько есть способов расставить k множителей a среди n множителей, т. е. C_n^k.

Таким образом,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \qquad (1)$$

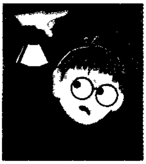
Понятно, что в этой формуле a^0 и b^0 можно было бы не писать, поскольку они равны 1. Тем не менее, мы написали их, чтобы все слагаемые выглядели одинаково.

Формула (1) называется ***формулой бинома Ньютона***. Бином — по-латыни двучлен. Сама эта формула была известна задолго до великого английского математика Исаака Ньютона. Его имя закреплено за формулой потому, что Ньютон указал возможность обобщения этой формулы на отрицательные и даже дробные показатели степени. Числа сочетаний C_n^k, которые используются в формуле бинома Ньютона, по-другому называются ***биномиальными коэффициентами***.

Если в формуле бинома Ньютона поставить знак минус перед b, то минус появится в правой части формулы перед теми членами, где b в нечетной степени. Так получается формула для возведения в степень n разности двух чисел:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \ldots \pm C_n^n a^0 b^n. \qquad (2)$$

Если n нечетно, то перед последним слагаемым стоит минус, если же n четно, то перед последним слагаемым знак плюс. Формулу (2) также называют формулой бинома Ньютона, поскольку она является просто другой формой записи формулы (1).



Пример 1. Напишем формулу для возведения $a+b$ в четвертую степень. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^4 = C_4^4a^4 + C_4^3a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^1ab^3 + C_4^0b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Пример 2. Напишем формулу для возведения $x-y$ в пятую степень. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(x-y)^5 = C_5^5x^5 - C_5^4x^4y + C_5^3x^3y^2 - C_5^2x^2y^3 + C_5^1xy^4 - C_5^0y^5 =$$
$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$$

С помощью формулы бинома Ньютона можно решать некоторые алгебраические уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 15$.

Решение. Прибавим в левой и в правой части единицу:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 16.$$

Левая часть преобразуется по формуле бинома Ньютона:

$$(x-1)^4 = 16,$$

откуда $x-1=2$ или $x-1=-2$. Тогда $x=3$ или $x=-1$.

Ответ: -1; 3.

Пример 4. Доказать, что если a — целое число, то $(a+1)^n - 1$ делится на a при любом натуральном n.

Доказательство. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(a+1)^n - 1 = C_n^na^n + C_n^{n-1}a^{n-1} + \ldots + C_n^1a + C_n^0 - 1.$$

Поскольку $C_n^0 = 1$, получаем:

$$(a+1)^n - 1 = C_n^na^n + C_n^{n-1}a^{n-1} + \ldots + C_n^1a = a(C_n^na^{n-1} + C_n^{n-1}a^{n-2} + \ldots + C_n^1).$$

Выражение $(a+1)^n - 1$ разложено на целые множители, один из которых равен a. Следовательно, $(a+1)^n - 1$ делится на a, что и требовалось доказать.

Когда мы говорили об испытаниях Бернулли (с. 176), мы получили, что вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли равна

$$C_n^kp^kq^{n-k},$$

где p и q — соответственно вероятности успеха и неудачи. Таким образом, обнаруживается связь между вероятностями событий в серии испытаний Бернулли и биномом Ньютона: **вероятность k успехов равна соответствующему члену в разложении $(p+q)^n$ по формуле бинома Ньютона.** По этой причине распределение случайной величины S «число успехов в серии из n испытаний Бернулли» называется биномиальным распределением.

Мы вывели формулу бинома Ньютона для возведения двучлена в натуральную степень. Кроме того, мы нашли связь между биномом Ньютона и биномиальным распределением.

Вопросы

1. Что означает слово бином?
2. Как называются коэффициенты при возведении двучлена в натуральную степень?
3. Как вычислить коэффициенты для возведения двучлена в натуральную степень?

Упражнения

1. Раскройте скобки в выражении:
а) $(a+1)^4$; б) $(x+2)^3$; в) $(c-d)^5$;
г) $(2-p)^5$; д) $(m+1)^6$; е) $(x+y)^9$.
2. Возведите двучлен в степень:
а) $(p-1)^4$; б) $(a-b)^7$; в) $(x+y)^6$;
г) $(m-2n)^5$; д) $(3p+q)^3$ е) $(x+1)^{10}$.
3. Представьте выражение в виде степени:
а) $a^4-4a^3+6a^2-4a+1$; б) $x^3+6x^2+12x+8$;
в) $1-10m+40m^2-80m^3+80m^4-32m^5$; г) $a^3+b^3+3ab(a+b)$;
4. Представьте в виде степени выражение:
а) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$; б) $m^3+9m^2+27m+27$
в) $y^7-7y^6+21y^5-35y^4+35y^3-21y^2+7y-1$; г) $a^4+b^4-4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2$.
5. Упростите выражение
а) $\dfrac{(n+m)^4+(n-m)^4}{2}-6m^2n^2$; б) $(a+1)^5-a^5-4a^4-6a^3-4a^2-a$;
в) $\dfrac{x^3-8-(x-2)^3}{6x}$;
6. Решите уравнение
а) $x^3-3x^2+3x=9$;
б) $z^5-5z^4+10z^3=10z^2-5z+1$;
в) $y^4+8y^3+24y^2+32y+15=0$;

7. Найдите корень уравнения:

а) $y^5+5y^4+10y^3+10y^2+5y=31$; б) $x^4+6x^2+1=-4(x^3+x)$;

в) $z^3-9z^2+27z-35=0$.

8. Пусть p и q — соответственно вероятности успеха и неудачи в серии из n независимых испытаний Бернулли. Докажите, что

$$C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n = 1.$$

9. Докажите, что если b целое число, то $(b+2)^n-2^n$ делится на b при любом натуральном n.

10. Докажите, что:

а) если c — целое число, а n — четное натуральное число, то $(c-3)^n-3^n$ делится на c.

б) если d — целое число, а n — нечетное натуральное число, то $(d-3)^n+3^n$ делится на d.

11. Докажите, что числа 4562^n и 2^n оканчиваются одной и той же цифрой при любом натуральном n.

12*. Докажите, что числа 453^{20} и 637^{20} оканчиваются одной и той же цифрой.

13*. Докажите тождество:

а) $(b+1)^3-3(b+1)^2+3(b+1)-1=b^3$;

б) $a^4+5a^3+9a^2+7a+2=(a+1)^3(a+2)$.

14*. Упростите выражение

а) $\left(\dfrac{(x+y)^6-(x-y)^6}{4xy}-10x^2y^2\right):(x^4+y^4)$;

б) $\sqrt{\dfrac{(p+q)^5+(p-q)^5}{2p}-8p^2q^2-4q^4}$.

15*. Докажите, что для любого n верно равенство

а) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$;

б) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots\mp C_n^{n-1}\pm C_n^n=0$.

66. Свойства биномиальных коэффициентов

Нам известно, что число сочетаний C_n^k вычисляется по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3)$$

В предыдущем пункте мы нашли, что числа C_n^k являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона и поэтому называются биномиальными коэффициентами.

66. Свойства биномиальных коэффициентов

Вычислим C_n^0, C_n^1 и C_n^2:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Эти равенства легко доказать, пользуясь формулой (1). Докажем первое из них:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

Биномиальные коэффициенты обладают множеством интересных свойств.

Свойство 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство. Выбирая k предметов из n предметов, мы тем самым делим предметы на две «кучки»: в одной k «выбранных» предметов, а в другой $n-k$ «невыбранных» предметов. Но ведь можно считать, что во второй кучке лежат «выбранные» предметы, а в первой, напротив, — «невыбранные». Получается, что число способов выбрать k предметов равно числу способов выбрать $n-k$ предметов. То есть $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Из этого свойства следует, что

$$C_n^n = C_n^0 = 1, \quad C_n^{n-1} = C_n^1 = n, \quad C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следующее свойство очень важное. Оно показывает, как можно искать одни биномиальные коэффициенты, зная другие.

Свойство 2. Если $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Доказательство. Представим себе, что предметы, которые мы выбираем — это шарики. Всего шариков n, из них один красный, остальные $n-1$ шариков — синие. Поставим вопрос: сколько существует способов выбрать k шариков из n?

Сначала рассмотрим все возможные наборы, в которых есть красный шарик. В таких наборах $k-1$ синих шариков. Эти синие шарики выбраны из $n-1$ имеющихся. Таким образом, всего можно составить C_{n-1}^{k-1} таких наборов.

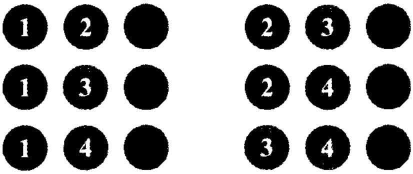
Теперь рассмотрим все наборы, в которых нет красного шарика. В каждом таком наборе k синих шариков, выбранных из $n-1$ имеющихся, поэтому таких наборов C_{n-1}^k.

Мы перебрали все возможные наборы — с красным шариком и без него. Следовательно, мы получили все C_n^k наборов. Поэтому,

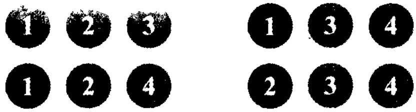
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Иллюстрация доказательства для частного случая $n = 5$, $k = 3$ приведена на рисунке. Показаны все $C_4^2 = 6$ наборов с красным шариком и отдельно — все $C_4^3 = 4$ набора без красного шарика. Всего получается $C_5^3 = 10$ наборов.

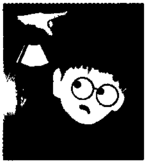
Исходный набор шариков



Все наборы с красным шариком



Все наборы без красного шарика



Пример 1. Вычислить $C_{124}^{1}+C_{124}^{123}$.

Решение. По свойству 1 получаем: $C_{124}^{1}+C_{124}^{123}=C_{124}^{1}+C_{124}^{1}=$ $=2\cdot C_{124}^{1}=2\cdot 124=248$.

Ответ: 248.

Пример 2. Упростить выражение $C_{34}^{13}-C_{33}^{13}-C_{33}^{21}$.

Решение. По свойству 2 находим: $C_{33}^{12}+C_{33}^{13}=C_{34}^{13}$. Поэтому $C_{34}^{13}-C_{33}^{13}=C_{33}^{12}$. Следовательно, $C_{34}^{13}-C_{33}^{13}-C_{33}^{21}=C_{33}^{12}-C_{33}^{21}$. Из свойства 1 следует, что $C_{33}^{12}=C_{33}^{33-12}=C_{33}^{21}$. Поэтому $C_{33}^{12}-C_{33}^{21}=0$.

Ответ: 0.

Пример 3. Доказать формулу $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Доказательство. $C_n^2=\dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2\cdot(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Упражнения

1. Вычислите: а) C_{2004}^{0}; б) C_{1989}^{1989}; в) C_n^n.
2. Вычислите: а) C_{124}^{123}; б) C_{673}^{1}; в) C_{2005}^{2004}; г) C_n^1.
3. Докажите, что $C_n^1=n$ и $C_n^{n-1}=n$.
4. Вычислите:
а) C_3^2; б) C_4^2; в) C_{200}^{2}; г) C_{100}^{98}; д) C_{45}^{43}; е) $C_{2004}^{2}-C_{2003}^{2}$.
5. Существует ли натуральное n, такое, что C_n^2 равно:
а) 10; б) 13; в) 21; г) 37; д) 36; е) 6; ж) 66; з) 666?
Если существует, найдите значение n.
6. Докажите тождества:
а) $C_n^2+C_{n+1}^2=n^2$; б) $C_{n+1}^2-C_n^2=n$.
7. Упростите выражение:
а) $C_{199}^{3}+C_{199}^{4}$; б) $C_{56}^{23}+C_{56}^{22}$; в) $C_{112}^{67}-C_{111}^{67}$; г) $C_{29}^{14}-C_{28}^{13}$.

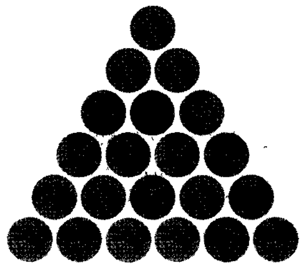
8. Докажите тождество:
а) $C_{37}^{21}+C_{37}^{22}-C_{38}^{22}=0$; б) $C_{123}^{34}+C_{123}^{35}=C_{125}^{36}-C_{124}^{36}$;
в) $C_{19}^{5}+C_{19}^{13}=C_{20}^{6}$; г) $C_{204}^{100}-C_{203}^{103}=C_{203}^{99}$;
д) $C_{17}^{12}-C_{16}^{12}=C_{16}^{5}$; е) $C_{2003}^{1002}+C_{2003}^{1000}=C_{2005}^{1002}-C_{2004}^{1002}$.

9. Зная, что $C_n^n=C_n^0=1$ и пользуясь свойством 2, найдите последовательно числа C_1^0, C_1^1, C_2^0, C_2^1, C_2^2, C_3^0, C_3^1, C_3^2 и C_3^3.

10*. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство $1+2+3+\ldots$ $\ldots+n=C_{n+1}^2$.

Справка.

Если составить треугольник из шариков, как показано на рисунке, то общее число шариков равно C_{n+1}^2, как это следует из задачи 10. Из-за этого свойства числа C_n^2 называют ***треугольными числами***.



11*. В буфете всего 5 шоколадок с орехами и 5 с изюмом. Надя покупает 5 шоколадок, не глядя на начинку. Сколько существует способов отобрать 5 шоколадок так, что среди них:

а) нет ни одной с орехами;
б) одна с орехами;
в) две с орехами;
г) три с орехами;
д) четыре с орехами;
е) все пять с орехами?
ж) Сколько всего существует способов выбрать пять шоколадок?

12*. Обобщите предыдущую задачу на случай, когда в буфете имеется n шоколадок с орехами и n с изюмом. Сколько существует способов выбрать n шоколадок, среди которых ровно k с орехами? При решении используйте свойство $C_n^{n-k}=C_n^k$. Сколько всего существует способов выбрать n шоколадок?

13*. Используя результаты предыдущей задачи, докажите тождество:

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^{n-1})^2+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

67. Треугольник Паскаля

Находить числа C_n^k по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

не очень удобно. Давайте составим таблицу этих чисел. Чтобы это сделать, воспользуемся известными нам свойствами. Начнем с $n=1$. Очевидно, $C_1^0=C_1^1=1$. Поэтому первая строка таблицы состоит всего из двух единиц.

$n \backslash k$	0	1
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$

Составим вторую строку. Мы знаем, что $C_2^0 = C_2^2 = 1$. Следовательно, крайние числа во второй строке также равны 1. А для C_2^1 воспользуемся свойством 2:

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2.$$

Иными словами, C_2^1 получается как сумма двух чисел первой строки. В таблице красным цветом выделены два числа в первой строке, а синим цветом — их сумма во второй строке.

$n \backslash k$	0	1	2
1	1	1	
2	1	2	1

Третья строка и все последующие получаются по тем же правилам:

1. Крайние числа в каждой строке равны 1, поскольку $C_n^0 = C_n^n = 1$ для любого натурального n.

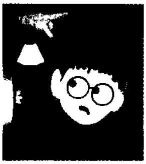
2. Любое не крайнее число во всех строках, начиная со второй, получается сложением двух чисел, стоящих над ним (в том же столбце и в предыдущем).

Треугольник Паскаля (числа C_n^k до $n = 10$)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

В результате получается треугольник из чисел C_n^k. Этот треугольник называют числовым, арифметическим, а также треугольником Паскаля по имени выдающегося французского математика Блеза Паскаля, изучавшего свойства этого треугольника. Строки треугольника Паскаля нумеруются целыми числами, начиная с нуля. Так же с нуля нумеруются и столбцы треугольника.

Как пользоваться треугольником Паскаля, покажем на примере.



Пример 1. Найти C_6^3. Найдем число, стоящее в шестой строке и в третьем столбце. Это число 20. Таким образом, $C_6^3 = 20$.

Пример 2. Выписать последовательность треугольных чисел.

Решение. Треугольные числа — это числа вида C_n^2. Они располагаются во втором столбце треугольника Паскаля: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45...

Вопросы

1. Выучите наизусть строки треугольника Паскаля до пятой строки включительно.
2. Сколько чисел в 3 строке треугольника Паскаля? В n-й строке?
3. В каких строках треугольника каждое число встречается ровно два раза?
4. В каких строках треугольника есть число, которое встречается только один раз?
5. Как чередуются четные и нечетные числа во втором столбце треугольника Паскаля?

Упражнения

1. Выпишите в тетради строки треугольника Паскаля для n от 0 до 10. Постарайтесь при этом не смотреть на треугольник в учебнике. Допишите еще две строки треугольника для $n = 11$, 12.
2. Выпишите значения C_n^k для $n = 3$ и $k = 0, 1, 2, 3$.
3. Выпишите значения C_n^k для $n = 4$ и $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
4. Докажите, что числа первого столбца в треугольнике Паскаля совпадают с номером строки.
5. Верно ли, что все числа в 7 строке треугольника, кроме первого и последнего, делятся на 7? Найдите еще хотя бы 3 строки с похожим свойством.
6. Девять первых треугольных чисел выписаны в примере 2:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ \ldots$$

Найдите закономерность и напишите:

а) десятое число;

б) одиннадцатое число;

в) двенадцатое число.

7*. Докажите, что если p — простое число, то все числа, кроме первого и последнего, в p-й строке треугольника Паскаля делятся на p.

8*. Как известно, числа второго столбца треугольника Паскаля называют треугольными, поскольку каждое из них равно числу шариков составляющих некоторый равносторонний треугольник (задача 10 на с. 223). Придумайте геометрическую фигуру (не обязательно в плоскости), обладающую тем же свойством для чисел третьего столбца.

Самостоятельные и контрольные работы

7 класс

Самостоятельная работа 1 по теме «Таблицы»

1. В таблице представлен объем экспорта естественного газа из России в некоторые страны мира в 2001 г.

Страны	Экспорт газа из России в 2001 г., млрд. куб. м	Страны	Экспорт газа из России в 2001 г., млрд. куб. м
Литва	2,68	Швейцария	0,34
Латвия	1,46	Турция	11,12
Эстония	0,82	Финляндия	4,64
Австрия	4,91	Франция	11,15
Болгария	3,32	Чехия	7,46
Венгрия	8,10	Словакия	7,52
Италия	20,20	Югославия	1,57
Германия	32,60	Нидерланды	0,13
Польша	7,51	Греция	1,52
Румыния	2,88		

По данным таблицы укажите:

а) наиболее крупных потребителей российского газа (более 10 млрд. куб. м);

б) государства, которые в 2001 г. получили менее 1 млрд. куб. м.;

в) общий объем газа, экспортированного в 2001 г. в указанные страны.

2. Участники Интернет-форума указали города, где они проживают. Получился следующий список:

Москва, Смоленск, Москва, Москва, С.-Петербург, Челябинск, Назрань, Москва, Норильск, Уфа, Москва, Волгоград, С.-Петербург, Ногинск, Москва, Москва, Челябинск, Москва, С.-Петербург, С.-Петербург, Москва, Челябинск, Дмитров, Москва, Ижевск, Мурманск, Волгоград, Москва, Ярославль.

Составьте таблицу подсчета и таблицу распределения участников форума по городам.

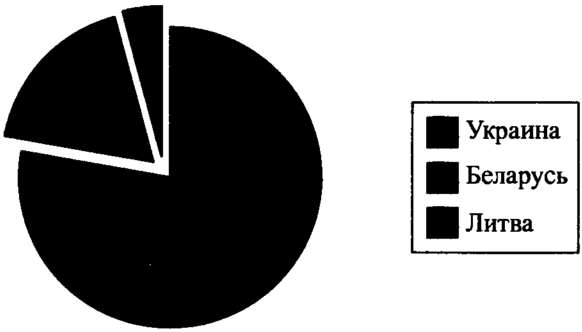
Самостоятельная работа 2 по теме «Диаграммы»

1. В таблице даны денежные вклады граждан России в Сбербанке РФ в каждом месяце 1995 г.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вклад, млрд. руб.	550	560	560	640	640	1100	1100	1100	1630	1610	1610	2500

Постройте столбиковую диаграмму, отражающую данные таблицы.

2. На круговой диаграмме показан объем поставок российского газа в три страны в 2005 г.



а) В какую из этих трех стран было поставлено больше всего газа в 2005 г.? В какую меньше всего?

б) С помощью транспортира и калькулятора найдите приближенно объем поставок в Беларусь, если суммарная поставка во все три страны равна 57 168,1 млрд. куб. м газа.

Самостоятельная работа 3 по теме «Случайная изменчивость, среднее значение»

1. В сосуд с теплой водой погрузили 10 термометров. Термометры показали следующие результаты:

34,5°; 35,1°; 34,4°; 34,2°; 34,7°;

34,6°; 35,0°; 34,2°; 34,5°; 34,8°.

а) Чем может объясняться изменчивость в показаниях термометров? Назовите хотя бы две возможные причины.

б) Расположите полученные значения по возрастанию.

в) Найдите среднее значение температуры и размах полученного набора.

2. Пользуясь результатами задачи 1, составьте таблицу отклонений показаний термометров от среднего значения. Сколько показаний меньше, чем среднее? Сколько показаний больше, чем среднее?

3. Пользуясь результатами задачи 1, найдите медиану показаний термометров. Сколько показаний больше и сколько показаний меньше медианы?

Самостоятельная работа 4 по теме «Размах и дисперсия»

1. Дан набор чисел 3; 1; 5; 2; –1; 0; 3; 4.

а) Найдите размах этого набора.

б) Найдите среднее значение, составьте таблицу квадратов отклонений от среднего.

в) Найдите дисперсию набора.

2. Даны два набора чисел: 7; 4; 9; 8 и 2; –1; 4; 3.

а) Отметьте числа обоих наборов на числовой прямой.

б) Вычислите дисперсию каждого из наборов.

в) У какого набора дисперсия больше?

Примерная контрольная работа

Вариант 1

1. В таблице представлена смета расходов при покупке продуктов питания. Заполните столбец «Стоимость».

Наименование товара	Цена за кг	Вес, кг	Стоимость
Сахарный песок	25 р.	2	
Сыр	180 р.	0,4	
Мука	16 р.	2	
Рис	30 р.	1	
Картофель	20 р.	4	
Всего			

2. За диктант по русскому языку учительница поставила 7 пятерок, 9 четверок, 8 троек и 2 двойки. Постройте столбиковую диаграмму по этим данным. Вычислите среднюю оценку.

3. Дан набор чисел 1; 3; –4; 2; 7; 5. Найдите среднее значение и медиану этого набора.

4. В таблице представлено производство автомобилей на некотором автозаводе по годам.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Число автомобилей, тыс. штук	84	77	81	79	85	102	113

Составьте таблицу изменения производства автомобилей по сравнению с 2000 г. в процентах.

5*. В таблице представлены среднемесячные температуры за первые 6 месяцев года в Волшебной стране.

Месяцы	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Температура, °С	−9	−7	−3	5	11	15

Вычислите дисперсию температуры за эти полгода. Результат округлите до десятых.

Вариант 2

1. В таблице представлена смета расходов при покупке электротоваров. Заполните столбец «Стоимость».

Наименование товара	Цена за шт.	Кол-во	Стоимость
Лампа электрическая	5 р.	24	
Выключатель	30 р.	15	
Предохранитель	40 р.	4	
Розетка бытовая	35 р.	10	
Счетчик электроэнергии	620 р.	1	
Всего			

2. В понедельник и во вторник магазин продал по 5 автомобилей, в среду — 6, в четверг — 4, в пятницу — 8, а в субботу — 12 автомобилей. Вычислите среднее число автомобилей, проданных за день. Постройте по этим данным столбиковую диаграмму «число проданных автомобилей по дням».

3. Дан набор чисел 3; 6; 4; −2; 5; 8. Найдите среднее значение и медиану этого набора.

4. Таблица показывает, сколько пассажиров перевезла некоторая авиакомпания в каждом году.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Число пассажиров, тыс. чел.	484	375	398	467	481	407	442

Составьте таблицу изменения для числа пассажиров авиакомпании по сравнению с 2000 г. в процентах.

5*. В таблице представлены среднемесячные температуры за 6 последних месяцев года в Тридесятом королевстве.

Месяцы	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Температура, °C	20	16	11	4	−2	−7

Вычислите дисперсию температуры за эти полгода. Результат округлите до сотых.

8 класс

Самостоятельная работа 1 по теме «Элементарные события»

1. Бросают одну игральную кость. Перечислите элементарные события, благоприятствующие событию «выпало нечетное число очков»

2. Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий при бросании двух игральных костей. Выделите в этой таблице цветными карандашами элементарные события, благоприятствующие событиям:

а) на обеих костях выпало число очков меньшее, чем 3;

б) сумма очков на двух костях равна 7;

в) произведение выпавших очков равно 12.

3. В случайном опыте всего три элементарных события a, b и c. Вероятности элементарных событий a и b соответственно равны 0,4 и 0,1. Найдите вероятность события, которому:

а) благоприятствует элементарное событие c;

б) благоприятствуют элементарные события a и c.

4. В шахматной коробке лежит 5 черных и 6 белых пешек. Игрок, не глядя, вынимает одну пешку. Найдите вероятность того, что пешка окажется белой.

Самостоятельная работа 2 по теме «Вероятности событий»

1. В случайном эксперименте 17 элементарных событий. Событию A благоприятствуют 8 из них. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A}$? Найдите вероятность события $\overline{A}$, если вероятность события A равна 0,32.

2. Бросают одну игральную кость. Событие A — выпало четное число очков. Событие B состоит в том, что выпало число очков, большее 3. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$. Найдите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

3. Бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало меньше 3 очков. Событие B — на второй кости выпало больше 4 очков. Выпишите элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$. Опишите словами это событие и найдите его вероятность.

4. События U и V несовместны. Найдите вероятность их объединения, если $\mathrm{P}(U) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}5$.

Самостоятельная работа 3 по теме «Независимые события»

1. События U и V независимы. Найдите вероятность наступления события $U \cap V$, если $\mathrm{P}(U) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}5$.

2. События K и L независимы. Найдите вероятность события K, если $\mathrm{P}(L) = 0{,}9$, $\mathrm{P}(K \cap L) = 0{,}72$.

3. Монету бросают два раза. Выпишите все элементарные события этого эксперимента. Событие A — первый раз выпал орел. Событие B — второй раз выпала решка. Найдите вероятность каждого из этих событий и вероятность их пересечения. Являются ли эти события независимыми?

4. Из ящика, где хранятся 5 желтых и 7 красных карандашей, продавец, не глядя, вынимает один за другим 3 карандаша. Найдите вероятность того, что:

а) все карандаши окажутся желтыми;

б) первые два карандаша — желтые, а третий — красный.

5*. Случайным образом выбирается натуральное число от 1 до 50. Событие C — выбрано четное число. Являются ли события C и D независимыми, если событие D состоит в том, что:

а) выбранное число делится на 7;

б) выбранное число делится на 5.

Самостоятельная работа 4 по теме «Перестановки и факториал числа»

1. Домашнее задание по литературе состоит в том, чтобы выучить одно из трех стихотворений: «Анчар», «Буря» или «Вьюга». Миша, Никита и Олег решили распределить все три стихотворения между собой по одному. Сколько существует способов это сделать?

2. Сколько различных последовательностеи (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова «книга»?

3. Вычислите значение выражения: а) $5!$; б) $\frac{12!}{10!}$; в) $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$.

4. Найдите вероятность того, что три последние цифры случайно выбранного телефонного номера — это цифры 2, 3, 1 в произвольном порядке.

Самостоятельная работа 5 по теме «Сочетания»

1. Вычислите: а) C_7^2; б) C_{12}^9.

2. В классе 20 учеников. Учитель решил проверить домашнюю работу у 6 из них. Сколько существует способов выбрать учеников для проверки?

3. Найдите вероятность того, что все буквы «а» окажутся на своих местах, если случайным образом перемешать и выстроить в ряд все буквы слова «карандаш».

4. На книжной полке 6 учебников и 3 сборника стихов. Найдите вероятность того, что среди случайно выбранных 5 книг окажется 3 учебника и 2 сборника.

Примерная контрольная работа

Вариант 1

1. В барабане лотереи 20 одинаковых шаров. Шары пронумерованы от 1 до 20. Барабан вращается, и из него выпадает один шар. Найдите вероятность того, что номер шара — четное число.

2. В результате некоторого опыта с вероятностью 0,63 может наступить событие A, с вероятностью 0,59 — событие B и с вероятностью 0,22 — событие $A \cap B$. Найдите вероятность события $A \cup B$. Является ли событие $A \cup B$ достоверным?

3. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет четное число, а во второй — число, большее чем 3.

4. В тесте 6 вопросов. К каждому вопросу дано 2 варианта ответов, из которых только один вариант верный. Найдите вероятность того, что, отвечая наугад, ученик правильно ответит хотя бы на один вопрос.

5. В кармане у Буратино 5 золотых и 6 серебряных монет. Все монеты одинаковы по форме и размеру. Буратино, не глядя, вынимает из кармана 5 монет. Найдите вероятность того, что все эти монеты — золотые.

Вариант 2

1. Слово «Математика» написали на картонке и разрезали картонку на буквы. Буквы перемешали. Найдите вероятность вытащить наудачу картонку с гласной буквой.

2. В результате некоторого опыта с вероятностью 0,78 может наступить событие A, с вероятностью 0,34 — событие B и с вероятностью 0,12 — событие $A \cap B$. Найдите вероятность события $A \cup B$. Верно ли, что событие $A \cup B$ достоверное?

3. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет нечетное число, а во второй — число, меньшее чем 3.

4. В тесте 5 вопросов. К каждому вопросу дано 2 варианта ответов, из которых только один вариант верный. Найдите вероятность того, что, отвечая наугад, ученик даст хотя бы один неверный ответ.

5. В вазочке на шкафу 4 конфеты с фруктовой начинкой и 5 — с молочной. Все конфеты одинаковы по форме и размеру. Маша дотянулась рукой до вазочки и, не глядя, выбирает 5 конфет. Найдите вероятность того, что все выбранные конфеты имеют молочную начинку.

9 класс

Самостоятельная работа 1 по теме «Геометрическая вероятность»

1. В отрезке BC случайным образом выбирается точка A. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит отрезку OM, где O — середина отрезка BC, а M — середина отрезка OB.

2. Из числового отрезка $[2;5]$ наудачу выбираются точки x и y. Найдите вероятность того, что $x \leqslant 3$, а $y \geqslant 4$.

3. На прямоугольном листе бумаги размером 10 см на 20 см нарисован квадрат. На лист бумаги случайным образом ставится точка. Вероятность того, что эта точка окажется внутри квадрата, равна 0,08. Найдите длину стороны нарисованного квадрата.

4*. В треугольнике ABC с тупым углом B случайным образом выбирается точка M. Точка D — середина медианы BH. Найдите вероятность того, что точка M принадлежит:

а) треугольнику ADC; б) треугольнику ABD.

Самостоятельная работа 2 по теме «Испытания Бернулли»

1. Проводится серия из 6 независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность элементарного события, в котором наступает сначала 2 успеха, а затем — 4 неудачи.

2. Сколько элементарных событий с 4 успехами возможно в серии из 10 испытаний Бернулли?

3. Найдите вероятность выбросить ровно 6 орлов, 10 раз бросив монету.

4*. Стрелок стреляет в мишень. Вероятность попадания равна 0,4. Найдите вероятность того, что, сделав 5 выстрелов, стрелок попадет в мишень не менее 2 раз.

Самостоятельная работа 3 по теме «Распределение случайной величины»

1. Случайная величина принимает все четные значения от -2 до 6 с равными вероятностями. Постройте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

2. Пять человек выстраиваются в очередь случайным образом. Среди этих пятерых в очереди стоит Иван Иванович. Постройте распределение случайной величины «число людей в очереди, стоящих перед Иваном Ивановичем».

3. В таблице дано распределение некоторой случайной величины X. Найдите пропущенную вероятность.

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,16	0,2	0,03	0,05	0,12	0,07		0,24

4*. Случайная величина Z принимает натуральные значения от 1 до 8 с вероятностями $\mathrm{P}(Z=k)=\frac{k}{a}$. Найдите значение a.

Самостоятельная работа 4 по теме «Математическое ожидание и дисперсия»

1. Случайная величина принимает все нечетные значения от -3 до 5 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

2. В таблице дано распределение случайной величины X. Чему равно $\mathrm{E}(X)$?

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,16	0,19	0,02	0,06	0,11	0,06	0,15	0,25

3. Игральную кость бросили 64 раза. Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X, равной числу выпадения четного числа очков.

4*. Серию испытаний Бернулли проводят дважды. В первый раз вероятность успеха была равна $\frac{1}{2}$, а во второй раз вероятность успеха равнялась $\frac{1}{3}$. В обоих случаях случайная величина S — число наступивших успехов. В каком из случаев ожидаемый разброс величины S больше?

Примерная контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите вероятность наступления ровно 3 успехов в 8 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{2}$.

2. В таблице дано распределение случайной величины X. Чему равна пропущенная вероятность?

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	0,16	0,29		0,16	0,21	0,06

3. Игральную кость бросают один раз. Найдите математическое ожидание случайной величины «сумма кубов числа выпавших очков».

4. Игральную кость бросили 120 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины «число выпадений четверки».

5*. В квадрат со стороной 1 дм вписан круг. Внутри квадрата случайным образом выбираются две точки. Найдите вероятность того, что обе точки принадлежат кругу.

Вариант 2

1. Найдите вероятность наступления ровно 4 успехов в 9 испытаниях Бернулли с вероятностью неудачи $q = \frac{1}{2}$.

2. В таблице дано распределение случайной величины X. Чему равна пропущенная вероятность?

Значение	−3	−2	−1	1	2	3
Вероятность	0,17	0,28	0,1		0,19	0,08

3. Игральную кость бросают один раз. Найдите математическое ожидание случайной величины «сумма квадратов числа выпавших очков».

4. Игральную кость бросили 180 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины «число выпадений двойки».

5*. В круг радиусом 1 дм вписан квадрат. Внутри круга случайным образом выбираются две точки. Найдите вероятность того, что обе точки принадлежат квадрату.

Словарь терминов

Баррель (от слова «бочка») — единица объема, принятая для нефти; примерно 159 литров.

Бином Ньютона — формула для возведения в n-ю степень двучлена (бинома) $a+b$:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Название формула получила в честь великого английского математика сэра Исаака Ньютона, который обобщил ее на случай дробных и отрицательных показателей степени.

Биномиальные коэффициенты — коэффициенты в формуле бинома Ньютона. Каждый коэффициент C_n^k является числом сочетаний из n по k.

Благоприятствующее элементарное событие. Элементарное событие, при наступлении которого наступает событие A, называется элементарным событием, благоприятствующим событию A.

Вероятность — числовая мера правдоподобия события. Вероятность принимает значения от 0 до 1.

Выбор наудачу (случайный выбор) — выбор одного предмета из некоторого набора, при котором шансы на выбор любого предмета одинаковы.

Выборка — часть всей совокупности людей или предметов, отобранная для исследования. Например, выборкой является группа избирателей, которую опрашивают для предварительного выяснения шансов кандидатов на избрание в парламент страны.

Демография — наука о закономерностях изменения численности и состава населения.

Диаграмма — метод графического представления данных, который используется для наглядного их отображения и сравнения. Как правило, диаграммы не дают точных значений, но лишь приблизительные.

Диаграмма круговая — диаграмма в виде круга, разделенного на секторы. Каждый сектор показывает, какую долю целого составляет та или иная величина в наборе данных. Обычно круговые диаграммы применяются для изображения состава населения, деления экономики на отрасли и т. п.

Диаграмма рассеивания — диаграмма, составленная из точек на координатной плоскости. Диаграммы рассеивания применяются для изучения связей между различными характеристиками, например ростом и весом животного и т. д. Абсцисса и ордината каждой точки — значения этих характеристик.

Диаграмма столбиковая — диаграмма, наглядно показывающая соотношение между различными значениями. Каждое значение представляется в виде столбика, высота которого пропорциональна этому значению.

Диаграмма Эйлера — способ графического изображения событий в виде фигур на плоскости. Каждое событие изображается некоторой фигурой, пересечение событий — общей частью этих фигур, объединение событий — объединением фигур. Диаграммы Эйлера позволяют наглядно показать связь между различными событиями. Несовместные события изображаются фигурами, не имеющими общих точек.

Дисперсия набора чисел — мера разброса значений числовых наборов (числовой выборки). Дисперсия набора равна среднему квадрату отклонения чисел набора от среднего арифметического значения:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Дисперсия случайной величины — мера рассеивания (разброса) значений случайной величины, определяемая формулой

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2.$$

Дисперсию также можно вычислять по формуле

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X).$$

У постоянной случайной величины дисперсия равна нулю.

Достоверное событие — случайное событие, вероятность которого равна 1. Это событие обязательно происходит при проведении опыта. Примером достоверного события является событие «выпал либо орел, либо решка» при бросании монеты.

Событие, противоположное достоверному, называется невозможным.

Дюйм — мера длины, равная 2,54 сантиметра. Один фут состоит из 12 дюймов. Один дюйм равен 10 линиям. В дюймах и линиях, например, измеряется калибр оружия. Знаменитая винтовка Мосина называется трехлинейкой, поскольку имеет калибр 3 линии, т. е. 7,62 мм. Трехдюймовка — орудие, имеющее калибр три дюйма — 76,2 мм.

Футы и дюймы — основные единицы измерения роста людей, длин и высот сооружений в США.

Закон больших чисел — собирательное название группы математических теорем, утверждающих, что среднее значение суммы случайных величин мало отличается от среднего значения их математических ожиданий при различных условиях. Основное условие — большое число складываемых величин, откуда и происходит название закона.

Испытание Бернулли — эксперимент, который заканчивается одним из двух элементарных событий: успехом или неудачей.

Комбинаторная задача — задача, связанная с необходимостью перечисления предметов или их комбинаций.

Легенда диаграммы — изображение условных обозначений с разъяснениями. Легенды также бывают у географических карт.

Маловероятное событие — событие, вероятность которого в обычных условиях считается малой. Пример — выигрыш в лотерею.

Математическая игральная кость — «идеальный» игральный кубик, для которого вероятность выпадения любой грани равна $\frac{1}{6}$. Математическую кость называют также симметричной. Наилучшим приближением к математической кости является обычная правильная кость.

Математическая монета — «идеальная» монета, которая падает вверх орлом с вероятностью $\frac{1}{2}$. Все свойства настоящей монеты — размер, материал, достоинство — для математической монеты несущественны. Математическую монету еще называют симметричной монетой.

Математическое ожидание случайной величины — числовая характеристика случайной величины, показывающая ее среднее значение. Математическое ожидание случайной величины вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n,$$

где p_i — вероятность того, что $X = x_i$.

Медиана числового набора. Медиана набора — число, которое характеризует расположение набора на числовой прямой.

Чтобы найти медиану, набор чисел можно упорядочить по возрастанию. Если в полученном наборе нечетное количество чисел, то медиана — это число, стоящее посередине; если в полученном наборе четное количество чисел, то медиана равна полусумме двух чисел, стоящих посередине.

Мера рассеивания (мера разброса) — числовая характеристика, показывающая, насколько близко к среднему значению группируются числа в наборе или значения случайной величины. Наиболее употребительные меры рассеивания — размах набора, средний модуль отклонения, дисперсия (средний квадрат отклонения) и стандартное отклонение (арифметический квадратный корень из дисперсии).

Наибольшее значение набора — число в наборе, которое не меньше, чем любое другое число этого набора.

Наименьшее значение набора — число в наборе, которое не больше, чем любое другое число этого набора.

Невозможное событие — случайное событие, вероятность которого в данном опыте равна нулю. Невозможное событие противоположно достоверному.

Независимые случайные величины. Если любые два события, одно из которых связано со случайной величиной X, а другое — со случайной величиной Y, независимы, то случайные величины X и Y называются независимыми.

Аналогично определяется произвольное количество независимых величин.

Важным примером независимых величин является число успехов в различных независимых испытаниях Бернулли.

Для независимых случайных величин X и Y верны следующие свойства:

1) $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y);$$

2) $$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y).$$

Независимые события. Два события A и B называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Часто независимость событий объясняется независимостью опытов, к которым они относятся. Например, независимы два события, относящиеся к различным испытаниям Бернулли.

Несовместные события — два события, которые не могут наступить в одном и том же опыте вместе (одновременно). Примером несовместных событий являются противоположные события.

Номинальный вес изделия — вес изделия, который должен получиться согласно технологии производства. Вес изделия при массовом производстве — величина изменчивая, поэтому для каждого изделия вес может немного отличаться от номинального.

Объединение (сумма) событий. Объединением событий A и B называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из событий A и B.

Орел — одна из сторон монеты (реверс). Другая сторона (аверс) называется решкой. Выпадение орла — одно из двух элементарных событий при бросании монеты.

Отклонение стандартное (среднее квадратичное) — мера рассеивания, которая равна арифметическому квадратному корню из дисперсии случайной величины:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}(X)}$$

Пересечение (произведение) событий. Пересечением событий A и B называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда наступают оба события A и B.

Перестановка — один из способов нумерации элементов некоторого множества. Если в множестве n элементов, то существует $n!$ перестановок этих элементов.

Правило сложения вероятностей — правило, по которому вычисляется вероятность объединения событий. Для двух произвольных событий A и B верна формула

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Если события A и B несовместны, то формула принимает более простой вид:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Правило умножения вероятностей — правило, которое гласит, что вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Правило умножения комбинаторное — правило, которое гласит, что число пар из двух предметов двух типов равно

$$m \cdot n,$$

где m — число предметов первого типа, n — число предметов второго типа. Имеется в виду, что в паре на первом месте стоит предмет первого типа, на втором — предмет второго типа.

Аналогично вычисляется число упорядоченных наборов, состоящих из предметов трех, четырех и более типов.

Противоположное событие. Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не наступило. Можно сказать иначе: событие $\overline{A}$ наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Равновероятные события — события, вероятности которых равны. Примером равновероятных событий могут служить равновозможные элементарные события. В опыте с бросанием игральной кости вероятность каждого из элементарных событий равна $\frac{1}{6}$, поэтому все они равновероятны.

Равновозможные элементарные события — элементарные события, у которых одинаковые шансы на наступление. Примером может служить опыт, состоящий в бросании правильной игральной кости. В этом опыте шесть элементарных событий, и все они равновозможны.

Размах набора — разность между наибольшим и наименьшим значениями этого набора.

Распределение вероятностей — закон, по которому каждому значению случайной величины в соответствие ставится вероятность того, что величина примет это значение. Распределение для конечной случайной величины можно задать таблицей, диаграммой или формулой.

Решка — одна из сторон монеты (аверс). Другая сторона (реверс) называется орлом. Выпадение решки — одно из двух элементарных событий при бросании монеты.

Серия испытаний Бернулли — случайный эксперимент, состоящий в последовательном проведении нескольких отдельных независимых испытаний Бернулли с одной и той же вероятностью успеха.

Систематическая ошибка — одна и та же ошибка, возникающая при любом измерении или наблюдении и связанная с настройкой прибора. Например, если весы не отрегулированы, то они все время могут показывать на 10 г больше, чем надо. Здесь 10 г — систематическая ошибка.

Если систематической ошибки нет, то все другие отклонения связаны со случайной изменчивостью и называются случайными ошибками измерения.

Случайная величина — величина, которая принимает те или иные значения в ходе случайного опыта под воздействием случая.

Случайная изменчивость — способность некоторой величины принимать различные значения по воле случая, т. е. под воздействием различных обстоятельств, которые нет возможности ни предвидеть, ни изменить.

Случайное событие — событие, которое может наступить в ходе некоторого опыта, а может не наступить. Наступит случайное событие или нет — дело случая. Невозможное и достоверное события также относят к случайным.

Случайный выбор — см. выбор наудачу.

Случайный опыт (случайный эксперимент) — математическая абстракция, описывающая реальный опыт, который может оканчиваться различными случайными событиями. Под случайным опытом можно также понимать наблюдение за некоторым явлением природы или измерение некоторой величины (длины, массы и т. п.). Иногда случайный опыт проводят намеренно. Примером может служить любая игра или лотерея, спортивное состязание.

Социологическое обследование — сбор информации об обществе с помощью опроса специально отобранной группы населения (выборки). Примером социологического обследования может служить предварительный опрос избирателей, тестирование учащихся или абитуриентов, изучение спроса и предложения товаров.

Сочетание. Любой набор k предметов, отобранных из набора, в котором n предметов, называется сочетанием из n по k.

Среднее набора чисел — среднее арифметическое чисел этого набора, т. е. их сумма, деленная на их количество.

Статистика — наука, посвященная методам систематизации, обработки и использования большого количества числовых данных. Такие данные называются статистическими. Важным примером статистических данных может служить численность групп населения страны, данные о производстве того или иного вида продукции, сведения о спросе и предложении какого-либо товара.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий вероятности событий. Теория вероятностей разрабатывает методы, с помощью которых можно вычислить вероятности одних событий, зная вероятности других. Теория вероятностей изучает также случайные величины и их распределения.

Точность измерения. Под точностью измерения часто понимают допустимую ошибку, которую можно сделать при измерении. Например, измеряя рост человека, говорят об измерении с точностью до сантиметра.

Под точностью измерения также понимают модуль разности между результатом измерения и истинным значением величины (длины, массы и т. п.).

Треугольник Паскаля (числовой или арифметический треугольник) — треугольная таблица, в которой записаны биномиальные коэффициенты (числа сочетаний) C_n^k. Крайние числа в каждой строке равны 1. Каждое число внутри треугольника получается сложением двух чисел, стоящих над ним. Треугольник назван в честь французского математика Блеза Паскаля, опубликовавшего в 1665 году «Трактат об арифметическом треугольнике».

Урожайность зерновых культур — масса зерновых культур, собранных с одного гектара. Урожайность зерновых является важной характеристикой состояния сельского хозяйства страны.

Факториал. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Факториал числа n обозначается $n!$.

Таким образом, для натурального n факториал вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Факториал нуля по определению полагают равным единице: $0! = 1$, $1! = 1$.

Частота. Пусть при проведении n случайных опытов событие A наступило k раз. Частотой события A называется отношение $\frac{k}{n}$.

Численность (объем) выборки — количество чисел, людей, предметов в исследуемой выборке.

Число сочетаиий. Число различных сочетаний из n по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число успехов в серии испытаиий Бериулли. Вероятность того, что в результате серии из n испытаний Бернулли наступит ровно k успехов, равна

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p и q — соответственно вероятности успеха и неудачи.

Элемеитарное событие — простейшее событие, которое наступает в результате случайного опыта. Элементарное событие нельзя разложить на более простые.

Любое событие опыта состоит из некоторых элементарных событий в том смысле, что является их объединением. Еще говорят, что элементарное событие может благоприятствовать некоторому событию.

Ответы и указания

К п. 3.

2. а) На футбольные мячи; б) на сетку. **7.** а) $\frac{10}{17}$; б) $\frac{4}{17}$. **10.** а) 130 р.

К п. 10.

5. а) 9; б) 9. **6.** а) 13; б) 13. **11.** а) 3; б) 4; в) 22; г) 202. **15.** а) 6.

18. а) 91 тыс. чел.; б) (приблизительно) 123,33 тыс. чел.; в) (приблизительно) 156,17 тыс. чел.; г) (приблизительно) 168,67 тыс. чел.

К п. 11.

1. а) Медиана 5, среднее арифметическое 5; б) медиана 5, среднее арифметическое 6; в) медиана 6, среднее арифметическое 6.

5. а) 11; б) 19; в) 28. **6.** а) 6; б) 6; в) 13.

8. а) (приблизительно) 1143,64; б) 1113. **9.** а) 1164; б) 1107.

11. а) Медиана 15,45 ц/га, средняя урожайность 15,85 ц/га.

К п. 12.

1. а) Медиана 13,5, среднее 13,5; б) медиана 19, среднее 23.

К п. 14.

1. а) $4\frac{2}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$; в) 6,5; г) 3,5; д) 6; е) 6,4.

К п. 16.

1. а) Среднее 1, дисперсия $\frac{2}{3}$; б) среднее 2, дисперсия $\frac{2}{3}$; в) среднее 12, дисперсия $\frac{2}{3}$.

2. а) Среднее 5, дисперсия $4\frac{2}{3}$; б) среднее 2, дисперсия $4\frac{2}{3}$; в) среднее 114, дисперсия $4\frac{2}{3}$.

3. а) Среднее 60, дисперсия 1400; б) среднее 18, дисперсия 126; в) среднее −66, дисперсия 1694.

К п. 17.

3. Для 1992–1996 гг. 15,68 ц/га, для 1997–2001 гг. 16,02 ц/га.

9. 49,89 г.

К п. 26.

2. 9 элементарных событий. **3.** 6 способов. **4.** г) 8. **6.** г) 16; д) 1024.

9. 12 возможных путей. **10.** 8 возможных путей. **11.** 216.
12. а) 0; б) 1; в) 3. **13.** а) 1; б) 4; в) 10.

К п. 28.

1. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,4; в) 0,89; г) 0,2, при этом $0 \leqslant p \leqslant 0,8$. **2.** $\frac{1}{6}$.
7. Вероятность каждого элементарного события: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{1024}$.
9. $\frac{1}{12}$. **10.** Вероятность каждого элементарного события $\frac{1}{8}$.
11. 27 элементарных событий. **12.** а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{1}{1296}$.

К п. 29.

3. Благоприятствующих элементарных событий а) 6; б) 4; в) 4; г) 2; д) 6; е) 12.
5. а) 5; б) 5. **7.** а) 2; б) 2; в) 3; г) 2.
8. а) 3; б) 3; в) 4; г) 4; д) 4; е) 7.
10. а) 2; б) 1; в) 4; г) 1; д) 2; е) 0; ж) 2; з) 3; и) 1. **11.** 8.

К п. 30.

1. а) 0,5; б) 0,6; в) 0,9; г) 0,3. **2.** а) 0,6; б) 0,7; в) 0,3.
3. а) 0,011; б) 0,763; в) 0,249; г) 0,144; д) 0,645; е) 0,065.
4. 0,17. **5.** $\mathrm{P}(a) = 0,1$; $\mathrm{P}(b) = 0,3$; $\mathrm{P}(c) = 0,6$. **6.** а) $\frac{29}{40}$; б) $\frac{7}{8}$; в) $\frac{5}{8}$.

К п. 31.

1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 0. **2.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{2}$.
4. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{18}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{18}$; е) $\frac{1}{3}$. **5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$.
6. а) $\frac{13}{24}$; б) $\frac{19}{24}$; в) $\frac{11}{24}$; г) $\frac{19}{24}$. **7.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{9}$. **8.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{2}$.
10. $\frac{1}{3}$. **11.** а) $\frac{7}{64}$; б) $\frac{7}{64}$; в) $\frac{11}{64}$; г) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{13}{64}$; е) $\frac{9}{64}$. **12.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{6}$.
13. а) 0,2; б) 0,04; в) 0,04. **14.** а) 0,25; б) 0,375; в) 0,375.
15. а) 0; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{1}{7}$; д) $\frac{4}{7}$. **16.** $\frac{1}{7}$. **17.** 0,6.
18. Вероятность выигрыша прохожего $\frac{1}{3}$, вероятность выигрыша игрока $\frac{2}{3}$.
19. а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$.

К п. 32.

2. а) 0,6; б) 0,15; в) 0,87; г) 0,5; д) $1 - p$. **4.** а) Нет; б) да.
6. а) $\frac{35}{36}$; б) $\frac{35}{36}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{11}{12}$. **7.** а) 10; б) 0,4.
8. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{5}{16}$; г) $\frac{3}{8}$.

К п. 33.

2. 13. **3.** а) 2; б) 4; в) 10.

7. а) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$; б) $P(A \cup B) = 1$; в) $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$; г) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

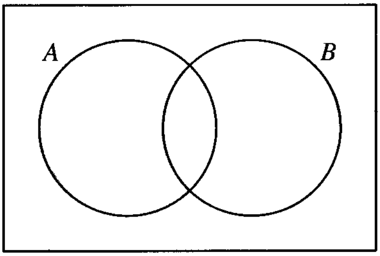
8. а) 28; б) 43; в) 11; г) 60.

9. в) «Хотя бы на одной из костей выпала 1»; б) $\frac{11}{36}$. **10.** г) $\frac{5}{9}$. **11.** г) $\frac{3}{4}$.

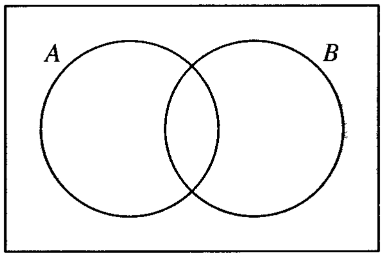
К п. 34.

1. Во всех пунктах ответ $\frac{1}{6}$. **2.** б) «На первой кости меньше трех очков, а на второй — больше четырех»; в) $\frac{1}{9}$. **8.** а) 4; б) 6. **9.** а) 2; б) 4.

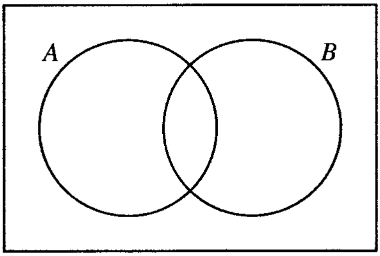
12. а)



; б)



; г)



.

К п. 35.

1. б) $\frac{2}{3}$. **2.** в) $\frac{5}{6}$. **3.** а) 0,6; б) 0,7; в) $2-\alpha-\beta$; г) $(a+b)^2$.

К п. 36.

1. а) 1; б) 0,8. **2.** а) 0,5; б) 0,3. **5.** а) 0,46; б) 0,54. **6.** а) 0,37; б) 0,63.

К п. 38.

1. а) 0,24; б) 0,08; в) $\alpha\beta-\alpha-\beta+1$. **2.** а) 0,6; б) 0,4; в) β; г) $1-\alpha$.

3. а) 0,12; б) 0,012; в) $\alpha\beta\gamma$. **4.** а) 0,2; б) 0,6; в) $\alpha\beta$.

11. а) 0,04; б) 0,008; в) 0,00032. **12.** Приблизительно 0,00009.

13. а) (Приблизительно) 0,13; б) 0,38. **14.** а) $\frac{1}{54}$; б) $\frac{1}{36}$.

15. (Приблизительно) 0,132. **16.** в) $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$.

17. (Приблизительно) а) 0,102; б) 0,014.

18. (Приблизительно) а) 0,022; б) 0,052; в) 0,039; г) 0,052.

19. (Приблизительно) а) 0,556; б) 0,278; в) 0,093; г) 0,015; д) 0.

20. а) $\frac{1}{22}$; б) $\frac{1}{66}$. **21.** $\frac{1}{24}$.

22. (Приблизительно) а) 0,257; б) 0,322; в) 0,164; г) 0,257.

23. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{5}{16}$. **24.** а) 0,0025; б) 0,9025; в) 0,0975. **25.** 0,7.

26. а) *Указание.* При решении задачи 9 а) (с. 130) доказано, что $P(A\cup B)=$ $=P(A)+P(\bar{A}\cap B)$.

Тогда $P(\bar{A}\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)=P(B)-$ $-P(A\cap B)$.

События A и B независимы, поэтому $P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=$ $=P(B)P(\bar{A})$, что и требовалось доказать.

б) *Указание.* Примените результат, полученный в п. а), к данным событиям.

К п. 39.

1. а) 32; б) 18; в) 180. **2.** а) 160; б) 252; в) 1365. **3.** 55. **4.** 10 000.

5. 1331. **7.** 11 мальчиков и 12 девочек. **8.** 11 и 13.

К п. 40.

5. а) 5040; б) 120; в) 720; г) 3.

6. а) 60; б) 42; в) 90; г) 100; д) 105; е) 220.

7. *Указание.* Выписав делители, пересчитайте их для самопроверки. Всего должно получиться а) 8 делителей; б) 16 делителей; в) 30 делителей.

К п. 41.

1. 0,006. **2.** а) 0,729; б) 0,729; в) 0,512; г) 0,343.

3. а) 0,344; б) 0,59; в) 0,76; г) 0,87. **4.** а) $\frac{1}{3\,628\,800}$; б) $\frac{1}{3\,628\,800}$. **5.** $\frac{1}{720}$.

7. $\frac{1}{24}$. **8.** $\frac{1}{120}$. **9.** $\frac{1}{40\,320}$. **10.** $\frac{1}{60}$. **11.** $\frac{1}{151\,200}$.

12. *Указание.* Единицу можно поставить на одно из четырех мест. Число 7 можно поставить на одно из трех оставшихся. Получаем общее число вариантов: 12. Эти варианты комбинируются с вариантами расположения двух оставшихся цифр. Каждая цифра выбирается одна из 8, поэтому способов выбрать оставшиеся две цифры всего 64. Тогда общее число допустимых комбинаций $12\cdot 64=768$. Чтобы получить искомую вероятность, нужно разделить полученное число на общее число возможных комбинаций из четырех цифр.

К п. 42.

1. а) 4; б) 10; в) 21; г) 5; д) 84; е) 56. **4.** 50. **5.** 50.
6. а) 36; б) 15; в) 35; г) 252. **7.** 210. **8.** 35. **9.** 376 992. **10.** 13 983 816.
11. а) 184 756. **12.** а) 53 130; б) 177 100; в) 53 130. **14.** 126.

К п. 43.

1. $\frac{1}{56}$. **2.** $\frac{1}{13\,983\,816}$. **4.** $\frac{1}{120}$. **5.** $\frac{1}{184\,756}$. **6.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{35}$; в) $\frac{1}{70}$; г) $\frac{1}{31\,824}$.
7. (Приблизительно) а) 0,024; б) 0,21.

8. *Указание.* Задачу можно без труда решить только с помощью правила умножения. Поступим иначе. Пусть цифры 1 и 2 «черные», а цифры 3 и 4 — «белые». Тогда задача формулируется проще: чему равна вероятность того, что, расставив две «белые» и две «черные» цифры произвольным образом в ряд, мы получим две «белые» цифры в конце?

Ответ: $\frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$.

10. $\frac{C_{10}^3 C_{10}^5}{C_{20}^8} \approx 0{,}24$.

11. (Приблизительно) а) 0,264; б) 0,736; в) $\frac{C_{12}^2}{C_{15}^5} \approx 0{,}022$; г) $\frac{C_{12}^3 C_3^2}{C_{15}^5} \approx 0{,}22$.

12. а) $\frac{1}{C_{36}^5} = \frac{1}{376\,992}$; б) $\frac{C_5^4 C_{31}^1}{C_{36}^5}$; в) $\frac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5}$; г) $1 - \frac{C_{31}^5}{C_{36}^5}$. **13.** $\frac{C_9^2 C_7^4}{C_{16}^6} \approx 0{,}157$.

К п. 44.

1. 0,5. **2.** а) 0,5; б) 0,25. **3.** $\frac{\pi}{4}$. **4.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{m}{2(n+m)}$.

5. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{m+2n}{2(n+m)}$. **6.** а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **7.** а) $\frac{20-3\pi}{20}$; б) 1.
8. (Приблизительно) 0,97.

К п. 45.

1. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 0; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{2}{3}$; е) 0. **2.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{6}$.
3. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$. **4.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$. **5.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{9}$. **6.** $\frac{1}{12}$.

К п. 46.

1. а) 0,5; б) 0,3; в) 0,3; г) 0,1; д) 0,2; е) 0,8; ж) 1; з) 0.
2. а) 0,25; б) 0,7; в) 0,7; г) 0,1; д) 0,1; е) 1; ж) 0; з) 0; и) 1.
3. а) 0,5; б) 0,7; в) 0,8; г) 0,7; д) 0,1; е) 0,7; ж) 0,5; з) 0.
4. а) 0,25; б) 0,12; в) 0,12; г) 0; д) 0,6.
5. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{3}$.

6. а) 0,5; б) 0,5; в) 0,5; г) 0; д) 0,5; е) 1.

7. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$. **8.** а) 0,1; б) 0,35; в) 0,05. **9.** $\frac{5}{6}$. **10.** а) $\frac{38}{45}$; б) $\frac{7}{45}$.
11. а) 0,1; б) 0,35; в) 0,575.

К п. 47.

4. а) $\frac{3}{4}$; б) 0,98; в) $\frac{5}{7}$; г) 0,17. **5.** $\frac{8}{243}$. **6.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{3^{15}}{4^{16}}$; г) $\frac{3^{14}}{4^{16}}$.

К п. 48.

2. а) 28; б) 28; в) 56; г) 56. **3.** а) 1; б) 10; в) 35; г) 84; д) $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

5. а) 4; б) 6; в) 8; г) 11; д) m.

6. *Указание.* Пользуясь формулой $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, сравните числа C_{15}^6 и C_{15}^9.

7. а) $C_n^2 + C_n^3$; б) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5$; в) $C_n^4 + C_n^6 + C_n^9$; г) $C_n^{n-3} + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$; д) $C_n^{n-3} + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$; е) $C_n^{n-2} + C_n^{n-3} + C_n^{n-4}$.

8. а) 134; б) 134.

К п. 49.

1. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{16}$. **2.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{35}{128}$; г) $\frac{21}{128}$; д) $\frac{7}{32}$; е) $\frac{C_n^3}{2^n}$.

3. (Приблизительно) а) 0,054; б) 0,00064; в) 0,402; г) 0,000021; д) 0,201; е) 0,335.

4. а) 0,1792; б) 0,5248; в) 0,8704; г) 0,9744.

5. (Приблизительно) а) 0,165; б) 0,041; в) 0,79; г) 0,539.

7. (Приблизительно) а) 0,056; б) 0,526; в) 0,922. **8.** $\frac{5}{16}$.

9. (Приблизительно) а) 0,054; б) 0,193; в) 0,9998; г) 0,997.

10. (Приблизительно) 0,077.

К п. 50.

3. а) 0; 10; 50; б) 0; 10; 50; 20; 60; 100.

К п. 51.

7. а) $\frac{1}{72}$; б) 0,04. **8.** а) 0,23; б) 0,47; в) 0,9; г) 0,53; д) 0,47; е) 0,77.

9. 21.

К п. 53.

1. а) $4\frac{13}{72}$; б) $-0{,}02$; в) 0. **2.** 0. **3.** 0. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** а) $4\frac{17}{36}$; б) $2\frac{19}{36}$. **11.** $5\frac{2}{3}$.

К п. 54.

1. а) 17,5; б) 24,5; в) 350; г) $3{,}5k$. **3.** а) 7; б) -3. **4.** а) 6 р. **5.** 2,5.

6. а) $\frac{n}{2}$; б) $\frac{n}{2}$.

К п. 57.

1. $\frac{1}{4}$. **2.** $p-p^2$. **3.** а) 3; б) 4. **4.** а) 2,4; б) 6,6. **7.** а) 4; б) 4.

8. а) 27; б) 3; в) 48; г) 12; д) 27; е) 75. **9.** $5\frac{5}{6}$.

К п. 58.

1. 10. **3.** а) 40; б) 20. **4.** 4. **5.** 0,45.

К п. 59.

1. Дисперсия равна 23,04; стандартное отклонение 4,8. **2.** а) 3000; б) 1875.

3. а) 21; б) 210; в) 525.

4. $D(S)=\frac{1}{4}n$ при $p=\frac{1}{2}$. *Указание.* $D(S)=np(1-p)=n(p-p)^2$. Рассмотрите квадратичную функцию $f(p)=p-p^2$ и найдите ее наибольшее значение на отрезке $[0;1]$.

К п. 64.

1. б) 4, 6, 4, 1; в) 5, 10, 10, 5, 1; г) 6, 15, 20, 15, 6, 1.

2. *Указание.* Запишите правило вычисления C_n^k в виде

$$C_n^k=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

и затем умножьте числитель и знаменатель на $(n-k)!$.

К п. 65.

3. г) и **4.** г) *Указание.* Сначала раскройте скобки и расположите слагаемые по убыванию степеней a и затем воспользуйтесь формулой бинома Ньютона.

5. а) n^4+m^4; б) $(a+1)^4$; в) $x-2$.

6. а) 3; б) 1; в) -3, -1.

7. а) 1; б) 1; в) 5.

14. а) 3; б) p^2+q^2.

15. а) *Указание.* В формуле бинома Ньютона положите $a=b=1$; б) *Указание.* В формуле бинома Ньютона положите $a=1$, $b=-1$.

К п. 66.

4. в) 19900; г) 4950; е) 2003.

5. в) $n=7$; г) не существует; д) $n=9$; ж) $n=12$; з) $n=37$.

10. *Указание.* Воспользуйтесь формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии и формулой для C_n^2.

11. а) 1; б) 25; в) 100; г) 100; д) 25; е) 1; ж) $C_{10}^5=252$.

12. Число способов выбрать n шоколадок, из которых ровно k шоколадок с орехами, равно $(C_n^k)^2$. Всего существует C_{2n}^n способов выбрать n шоколадок.

К п. 67.

7. *Указание.* Пусть p — простое число. Числа в соответствующей строке треугольника Паскаля равны $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$, где $k = 1, \ldots, p-1$. Чтобы доказать утверждение нужно воспользоваться тем, что знаменатель $k!(p-k)!$ и простое число p взаимно просты.

8. *Указание.* Расположите шарики в виде треугольной пирамиды.

Оглавление

Учебное издание

Юрий Николаевич Тюрин
Алексей Алексеевич Макаров
Иван Ростиславович Высоцкий
Иван Валериевич Ященко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 12.11.2007 г. Формат $70 \times 90/16$. Печать офсетная. Объем 16 печ. л. Тираж 10 000 экз. Заказ № 9663.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-72-85 (по вопросам распространения).

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Московские учебники и Картолитография». 125252, Москва, ул. Зорге, 15.

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

$$\mathrm{P}(S=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

Число сочетаний $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Числа C_n^k до $n=10$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Факториалы

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Таблица распределения случайной величины

Значение x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
Вероятность p_k	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_n

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$$

Математическое ожидание случайной величины

$$\mathbf{E}(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$$

Дисперсия случайной величины

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2$$

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$$

Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

$$\mathbf{E}(S) = np$$

$$\mathbf{D}(S) = npq = np(1 - p)$$

ISBN 978-5-94057-319-7
9 785940 573197 >